

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

§ 39. Сверхтекучий ферми-газ. Энергетический спектр

Вся изложенная в главе I теория Ландау относится только к одной категории ферми-жидкостей — к жидкостям, обладающим энергетическим спектром, не приводящим к явлению сверхтекучести. Этот тип спектров не является единственной возможностью для квантовой ферми-жидкости, и мы переходим теперь к изучению ферми-систем со спектром другого типа. Происхождение этого типа энергетических спектров и его основные свойства можно наиболее наглядным образом выяснить на простой модели, допускающей полное теоретическое исследование — вырожденном почти идеальном ферми-газе с притяжением между частицами¹⁾.

Слабо неидеальный ферми-газ с отталкиванием между частицами был рассмотрен в § 6. На первый взгляд, произведенные там вычисления в равной степени справедливы как для случая отталкивания, так и для притяжения между частицами, т. е. как при положительной, так и при отрицательной длине рассеяния a . В действительности, однако, в случае притяжения ($a < 0$) найденное таким образом основное состояние системы оказывается неустойчивым по отношению к определенной перестройке, меняющей его характер и понижающей энергию.

Физическая природа этой неустойчивости состоит в стремлении частиц к «спариванию»: образованию связанных состояний парами частиц, находящихся (в p -пространстве) вблизи ферми-поверхности и обладающих равными по величине и противоположными по направлению импульсами и антипараллельными спинами — так называемый эффект Купера (L. N. Cooper, 1957). Замечательно, что этот эффект возникает в ферми-газе уже при сколь угодно слабом притяжении между частицами.

Именно в силу этого эффекта использованная в задаче о ферми-газе с отталкиванием система операторов $\hat{a}_{p\alpha}$, $\hat{a}_{p\alpha}^+$, соответствующих свободным состояниям отдельных частиц газа, не может

¹⁾ Эта задача лежит в основе теории сверхпроводимости, построенной Бардином, Купером и Шриффером (J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, (1957). Излагаемый ниже метод решения принадлежит Н. Н. Боголюбову (1958).

служить теперь правильным исходным приближением теории возмущений¹⁾. Вместо них надо уже сразу ввести новые операторы, которые будем искать в виде линейных комбинаций

$$\begin{aligned}\hat{b}_{p-} &= u_p \hat{a}_{p-} + v_p \hat{a}_{-p, +}^+, \\ \hat{b}_{p+} &= u_p \hat{a}_{p+} - v_p \hat{a}_{-p, -}^+, \end{aligned} \quad (39,1)$$

объединяющих операторы частиц с противоположными импульсами и спинами (индексы + и - относятся к двум значениям проекции спина); в силу изотропии газа коэффициенты u_p , v_p могут зависеть только от абсолютной величины импульса p . Для того чтобы эти новые операторы отвечали рождению и уничтожению квазичастиц, они должны удовлетворять таким же правилам коммутации Ферми, как и старые операторы:

$$\hat{b}_{p\alpha} \hat{b}_{p\alpha}^+ + \hat{b}_{p\alpha}^+ \hat{b}_{p\alpha} = 1, \quad (39,2)$$

а все другие пары операторов антикоммутируют (индекс α нумерует два значения проекции спина). Для этого коэффициенты преобразования должны удовлетворять условию

$$u_p^2 + v_p^2 = 1 \quad (39,3)$$

(u_p , v_p могут быть сделаны вещественными надлежащим выбором фазового множителя). При этом обратное (по отношению к (39,1)) преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{a}_{p+} &= u_p \hat{b}_{p+} + v_p \hat{b}_{-p, -}^+, \\ \hat{a}_{p-} &= u_p \hat{b}_{p-} - v_p \hat{b}_{-p, +}^+. \end{aligned} \quad (39,4)$$

По тем же причинам (основной роли взаимодействия между парами частиц с противоположными импульсами и спинами) мы сохраним в гамильтониане (6,7) во второй сумме лишь члены, в которых $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$, $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}'$:

$$\hat{H} = \sum_{p\alpha} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{p\alpha}^+ \hat{a}_{p\alpha} - \frac{g}{V} \sum_{pp'} \hat{a}_{p+}^+ \hat{a}_{-p'}^+ - \hat{a}_{-p, -} - \hat{a}_{p+, +}, \quad (39,5)$$

где снова введена «константа связи» $g = 4\pi\hbar^2 |a|/m$ (длина рассеяния $a < 0$).

В дальнейших вычислениях будет удобно снова воспользоваться обычным приемом, позволяющим избавиться от необходи-

¹⁾ Указание на неприменимость теории возмущений (в использованной в § 6 форме) к парам частиц с проекциями спинов $\pm 1/2$ и с импульсами $\mathbf{p}_2 \approx -\mathbf{p}_1$ дает уже наличие особенности при $\vartheta = \pi$, которой обладает полуценное с помощью этой теории выражение функции взаимодействия квазичастиц (6,16); эта особенность существует только при антипараллельных спинах, которым отвечает равное -1 собственное значение оператора $\sigma_1 \sigma_2$.

мости явным образом учитывать постоянство числа частиц в системе: в качестве нового гамильтониана вводится разность $\hat{H}' = \hat{H} - \mu \hat{N}$, где

$$\hat{N} = \sum_{p\alpha} \hat{a}_{p\alpha}^+ \hat{a}_{p\alpha}$$

— оператор числа частиц; химический потенциал определяется затем, в принципе, условием равенства среднего значения \bar{N} заданному числу частиц в системе.

Введем также обозначение

$$\eta_p = \frac{p^2}{2m} - \mu. \quad (39,6)$$

Поскольку $\mu \approx p_F^2/2m$, то вблизи поверхности Ферми

$$\eta_p = v_F(p - p_F), \quad (39,7)$$

где $v_F = p_F/m$. Вычитая $\mu \hat{N}$ из выражения (39,5), напомним, таким образом, исходный гамильтониан в виде

$$\hat{H}' = \sum_{p\alpha} \eta_p \hat{a}_{p\alpha}^+ \hat{a}_{p\alpha} - \frac{g}{V} \sum_{pp'} \hat{a}_{p'}^+ \hat{a}_{-p'}^+ \hat{a}_{-p} \hat{a}_{p+}. \quad (39,8)$$

Произведем в этом гамильтониане преобразование (39,4). Используя соотношения (39,2—3) и возможность замены индекса суммирования p на $-p$, получим

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & 2 \sum_p \eta_p v_p^2 + \sum_p \eta_p (u_p^2 - v_p^2) (\hat{b}_{p+}^+ \hat{b}_{p+} + \hat{b}_{-p}^+ \hat{b}_{-p}) + \\ & + 2 \sum_p \eta_p u_p v_p (\hat{b}_{p+}^+ \hat{b}_{-p}^+ + \hat{b}_{-p} \hat{b}_{p+}) - \frac{g}{V} \sum_{pp'} \hat{B}_{p'}^+ \hat{B}_p, \quad (39,9) \\ \hat{B}_p = & u_p^2 \hat{b}_{-p} \hat{b}_{p+} - v_p^2 \hat{b}_{p+}^+ \hat{b}_{-p}^+ + v_p u_p (\hat{b}_{-p} \hat{b}_{-p}^+ - \hat{b}_{p+}^+ \hat{b}_{p+}). \end{aligned}$$

Выбор коэффициентов u_p , v_p осуществим теперь из условия минимальности энергии E системы при заданной энтропии. Последняя определяется комбинаторным выражением

$$S = - \sum_{p\alpha} [n_{p\alpha} \ln n_{p\alpha} + (1 - n_{p\alpha}) \ln (1 - n_{p\alpha})].$$

Поэтому указанное условие эквивалентно минимизации энергии при заданных числах заполнения квазичастиц $n_{p\alpha}$.

В гамильтониане (39,9) диагональные матричные элементы имеют лишь члены, содержащие произведения

$$\hat{b}_{p\alpha}^+ \hat{b}_{p\alpha} = n_{p\alpha}, \quad \hat{b}_{p\alpha} \hat{b}_{p\alpha}^+ = 1 - n_{p\alpha}.$$

Поэтому находим

$$E = 2 \sum_{\mathbf{p}} \eta_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 + \sum_{\mathbf{p}} \eta_{\mathbf{p}} (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2) (n_{\mathbf{p}+} + n_{\mathbf{p}-}) - \\ - \frac{g}{V} \left[\sum_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} (1 - n_{\mathbf{p}+} - n_{\mathbf{p}-}) \right]^2. \quad (39,10)$$

Варьируя это выражение по параметрам $u_{\mathbf{p}}$ (учитывая при этом связь (39,3)), получим в качестве условия минимума

$$\frac{\delta E}{\delta u_{\mathbf{p}}} = -\frac{2}{v_{\mathbf{p}}} (1 - n_{\mathbf{p}+} - n_{\mathbf{p}-}) \left[2\eta_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} - \right. \\ \left. - \frac{g}{V} (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2) \sum_{\mathbf{p}'} u_{\mathbf{p}'} v_{\mathbf{p}'} (1 - n_{\mathbf{p}'+} - n_{\mathbf{p}'-}) \right] = 0.$$

Отсюда находим уравнение

$$2\eta_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} = \Delta (u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2), \quad (39,11)$$

где Δ обозначает сумму:

$$\Delta = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} (1 - n_{\mathbf{p}+} - n_{\mathbf{p}-}). \quad (39,12)$$

Из (39,11) и (39,3) выражаем $u_{\mathbf{p}}$, $v_{\mathbf{p}}$ через $\eta_{\mathbf{p}}$ и Δ :

$$\left. \begin{array}{l} u_{\mathbf{p}} \\ v_{\mathbf{p}} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\eta_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\Delta^2 + \eta_{\mathbf{p}}^2}} \right). \quad (39,13)$$

Подставив же эти значения в (39,12), получим уравнение, определяющее Δ :

$$\frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1 - n_{\mathbf{p}+} - n_{\mathbf{p}-}}{\sqrt{\Delta^2 + \eta_{\mathbf{p}}^2}} = 1.$$

В равновесии числа заполнения квазичастиц не зависят от направления спина и даются формулой распределения Ферми (с равным нулю химическим потенциалом— ср. примечание на стр. 18):

$$n_{\mathbf{p}+} = n_{\mathbf{p}-} \equiv n_{\mathbf{p}} = [e^{\epsilon/T} + 1]^{-1}. \quad (39,14)$$

Перейдя также от суммирования к интегрированию по \mathbf{p} -пространству, запишем это уравнение в виде

$$\frac{g}{2} \int \frac{1 - 2n_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\Delta^2 + \eta_{\mathbf{p}}^2}} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 1. \quad (39,15)$$

Обратимся к исследованию полученных соотношений. Мы увидим, что величина Δ играет основную роль в теории спе-

ктров рассматриваемого типа. Вычислим прежде всего значение этой величины при $T=0$ (обозначим его Δ_0).

При $T=0$ квазичастицы отсутствуют, так что $n_p = 0$ и уравнение (39,15) принимает вид

$$\frac{g}{2(2\pi\hbar)^3} \int \frac{4\pi p^2 dp}{\sqrt{\Delta_0^2 + \eta_p^2}} = 1. \quad (39,16)$$

Сразу же отметим, что это уравнение заведомо не могло бы иметь решения (для Δ_0) при $g < 0$, т. е. в случае отталкивания (знаки обеих сторон уравнения были бы заведомо различны).

Основной вклад в интеграл в (39,16) вносит область импульсов, в которой $\Delta_0 \ll v_F |p_F - p| \ll v_F p_F \sim \mu$ и интеграл имеет логарифмический характер (малость Δ_0 по сравнению с μ подтверждается результатом). Обрезая логарифмический интеграл при некотором $\eta = \tilde{\varepsilon} \sim \mu$, имеем¹⁾

$$\int \frac{p^2 dp}{[\Delta_0^2 + v_F^2 (p_F - p)^2]^{1/2}} \approx \frac{p_F^2}{v_F} \int \frac{d\eta}{(\Delta_0^2 + \eta^2)^{1/2}} \approx \frac{2p_F^2}{v_F} \ln \frac{\tilde{\varepsilon}}{\Delta_0}.$$

Поэтому находим

$$\frac{g m p_F}{2\pi^2 \hbar^3} \ln \frac{\tilde{\varepsilon}}{\Delta_0} = 1, \quad (39,17)$$

откуда

$$\Delta_0 = \tilde{\varepsilon} \exp\left(-\frac{2\pi^2 \hbar^3}{g m p_F}\right) = \tilde{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\pi \hbar}{2p_F |a|}\right). \quad (39,18)$$

Это выражение можно записать также и в виде

$$\Delta_0 = \tilde{\varepsilon} \exp(-2/gv_F), \quad (39,19)$$

где $v_F = m p_F / \pi^2 \hbar^3$ — энергетическая плотность числа состояний частицы на ферми-поверхности ($v_F d\varepsilon$ — число состояний в интервале $d\varepsilon$).

Наибольший интерес представляет форма энергетического спектра системы — энергия элементарных возбуждений $\varepsilon_{p+} = \varepsilon_{p-} \equiv \varepsilon(p)$. Мы найдем ее по изменению энергии всей системы при изменении чисел заполнения квазичастиц, т. е. проварьируем E из (39,10) по $n_{p\alpha}$. Поскольку значения u_p, v_p уже выбраны из условия равенства нулю производных от E по ним,

¹⁾ При $p \gg p_F$ величина $\eta_p \approx p^2$, и интеграл (39,16) в написанном виде расходится, как p . В действительности, однако, эта расходимость фиктивна и устраняется перенормировкой связи между константой g (т. е. длиной рассеяния a) и потенциалом взаимодействия, подобно тому, как это было сделано в §§ 6 и 25. Последовательное проведение такого довольно сложного расчета дает возможность определить также и коэффициент пропорциональности между параметром обрезания $\tilde{\varepsilon}$ и химическим потенциалом μ : $\tilde{\varepsilon} = (2/e)^{2/3} \mu = 0,49\mu$ (см. Л. П. Горьков, Т. К. Мелик-Бархударов, ЖЭТФ 40, 1452 (1961)).

то варьирование E по $n_{p\alpha}$ можно производить при постоянных u_p, v_p . Таким образом,

$$\varepsilon = \left(\frac{\delta E}{\delta n_{p\alpha}} \right)_{u_p, v_p}$$

Вычисление производной с использованием (39,11—13) приводит к простому результату:

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\Delta^2 + \eta_p^2}. \quad (39,20)$$

Мы видим, что энергия квазичастицы не может быть меньше величины Δ , достигаемой при $p = p_F$. Другими словами, возбужденные состояния системы отделены от основной энергетической щелью. Обладая полуцелым спином, квазичастицы должны появляться парами. В этом смысле можно сказать, что величина щели равна 2Δ . Обратим внимание на экспоненциально малость этой величины:

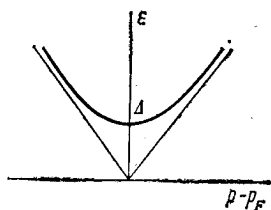


Рис. 5.

поскольку $p_F |a|/\hbar \ll 1$, то Δ_0 экспоненциально мало по сравнению с μ . Отметим также, что выражение (39,18) не может быть разложено по степеням малого

параметра — константы связи g ; последняя входит в знаменатель показателя экспоненты, так что значение $g = 0$ является существенно особой точкой функции $\Delta_0(g)$.

Спектр (39,20) удовлетворяет установленному в § 23 условию сверхтекучести: минимальное значение ε/p отлично от нуля. Поэтому ферми-газ с притяжением между частицами должен обладать свойством сверхтекучести.

На рис. 5 сравнены законы дисперсии квазичастиц в сверхтекучей (верхняя кривая) и нормальной ферми-системах. В последней этот закон изображается (в соответствии с указанной в конце § 1 трактовкой) двумя прямыми $\varepsilon = v_F |p - p_F|$.

Величина щели Δ зависит от температуры, т. е. сама форма спектра зависит от статистического распределения квазичастиц — ситуация, аналогичная тому, что имеет место для ферми-жидкости нормального типа. Поскольку при возрастании температуры числа заполнения квазичастиц возрастают (стремясь к 1), то уже из уравнения (39,15) видно, что Δ при этом уменьшается и при некоторой конечной температуре T_c обратится в нуль: система перейдет из сверхтекучего состояния в нормальное. Эта точка представляет собой фазовый переход второго рода (подобный λ -переходу в сверхтекучей бозе-жидкости).

Наличие энергетической щели в спектре вырожденного ферми-газа и является выражением эффекта «спаривания», о кото-

ром уже говорилось в начале параграфа. Величину 2Δ можно рассматривать как энергию связи куперовской пары, которую надо затратить для ее разрыва.

Гамильтониан (39,5) учитывает (как уже было отмечено в § 6) взаимодействие лишь между парами частиц, находящимися в синглетном s -состоянии: орбитальный момент относительного движения частиц равен нулю, а их спины антипараллельны. Обладая равным нулю полным спином, пары ведут себя как бозевские образования и могут накапливаться в конечном числе на уровне (своего движения как целого) с наименьшей энергией — уровне с равным нулю суммарным импульсом. В таком наглядном истолковании это явление вполне аналогично накоплению частиц в состоянии с нулевой энергией (бозе-эйнштейновской конденсации) в бозе-газе; в данном случае конденсатом является совокупность спаренных частиц.

Представлению о связанных парах не следует, конечно, придавать слишком буквальный смысл. Более точно следует говорить о корреляции между состояниями пары частиц в \mathbf{p} -пространстве, приводящей к конечной вероятности частицам иметь равную нулю сумму импульсов. Разброс δp значений импульсов в области корреляции соответствует энергии порядка Δ , т. е. $\delta p \sim \Delta/v_F$. Соответствующая длина $\xi \sim \hbar/\delta p \sim \hbar v_F/\Delta$ определяет порядок величины расстояний между частицами с коррелированными импульсами. При $T=0$ эта длина (ее называют *длиной когерентности*)

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta_0} \sim \frac{\hbar}{p_F} \exp\left(\frac{\pi\hbar}{2p_F|a|}\right). \quad (39,21)$$

Поскольку в вырожденном ферми-газе \hbar/p_F совпадает по порядку величины с межатомными расстояниями, то мы видим, что ξ_0 очень велико по сравнению с последними. Это обстоятельство в особенности наглядно демонстрирует условность понятия о связанных парах.

Происхождение эффекта Купера тесно связано с существованием ферми-поверхности, ограничивающей (в \mathbf{p} -пространстве) конечную область заполненных (при $T=0$) состояний; важное обстоятельство состоит в том, что энергетическая плотность числа состояний на этой поверхности отлична от нуля. Эта связь проявляется в формуле (39,19) для величины щели Δ_0 , обращающейся в нуль при $v_F \rightarrow 0$.

§ 40. Сверхтекучий ферми-газ. Термодинамические свойства

Изучение термодинамических свойств сверхтекучего ферми-газа начнем с вычисления температурной зависимости величин энергетической щели. Переписав уравнение (39,15) в следующем