ром уже говорилось в начале параграфа. Величину 2Δ можно рассматривать как энергию связи куперовской пары, которую надо затратить для ее разрыва.

Гамильтониан (39,5) учитывает (как уже было отмечено в § 6) взаимодействие лишь между парами частиц, находящимися в синглетном s-состоянии: орбитальный момент относительного движения частиц равен нулю, а их спины антипараллельны. Обладая равным нулю полным спином, пары ведут себя как бозевские образования и могут накапливаться в конечном числе на уровне (своего движения как целого) с наименьшей энергией — уровне с равным нулю суммарным импульсом. В таком наглядном истолковании это явление вполне аналогично накапливанию частиц в состоянии с нулевой энергией (бозе-эйнштейновской конденсации) в бозе-газе; в данном случае конденсатом является совокупность спаренных частиц.

Представлению о связанных парах не следует, конечно, придавать слишком буквальный смысл. Более точно следует говорить о корреляции между состояниями пары частиц в **p**-пространстве, приводящей к конечной вероятности частицам иметь равную нулю сумму импульсов. Разброс δp значений импульсов в области корреляции соответствует энергии порядка Δ, т. е. $\delta p \sim \Delta/v_F$. Соответствующая длина $\xi \sim \hbar/\delta p \sim \hbar v_F/\Delta$ определяет порядок величины расстояний между частицами с коррелированными импульсами. При $T=0$ эта длина (ее называют *длиной когерентности*)

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta_0} \sim \frac{\hbar}{p_F} \exp\left(\frac{\pi\hbar}{2p_F|a|}\right). \tag{39,21}$$

Поскольку в вырожденном ферми-газе $\hbar/p_F$ совпадает по порядку величины с межатомными расстояниями, то мы видим, что ξ_0 очень велико по сравнению с последними. Это обстоятельство в особенности наглядно демонстрирует условность понятия о связанных парах.

Происхождение эффекта Купера тесно связано с существованием ферми-поверхности, ограничивающей (в **p**-пространстве) конечную область заполненных (при $T=0$) состояний; важное обстоятельство состоит в том, что энергетическая плотность числа состояний на этой поверхности отлична от нуля. Эта связь проявляется в формуле (39,19) для величины щели Δ_0, обращающейся в нуль при $\nu_F \to 0$.

§ 40. Сверхтекучий ферми-газ. Термодинамические свойства

Изучение термодинамических свойств сверхтекучего ферми-газа начнем с вычисления температурной зависимости величины энергетической щели. Переписав уравнение (39,15) в следующем виде

$$-1+\frac{g}{2}\int\frac{d^3p}{\varepsilon(2\pi\hbar)^3}=g\int\frac{n_p\,d^3p}{\varepsilon(2\pi\hbar)^3},$$

замечаем, что интеграл в его левой стороне отличается от интеграла при $T=0$ лишь заменой Δ_0 на Δ. Поэтому учитывая (39,17), мы видим, что левая сторона равна $\frac{gp_Fm}{2\pi^2\hbar^3}\ln\frac{\Delta_0}{\Delta}$. В правой стороне подставляем n_p из (39,14) и переходим к интегрированию по $dp=d\eta/v_F$:

$$\ln\frac{\Delta_0}{\Delta}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\varepsilon\left(e^{\varepsilon/T}+1\right)}\equiv 2I\left(\frac{\Delta}{T}\right), \qquad (40,1)$$

где

$$I(u)=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+u^2}\left(\exp\sqrt{x^2+u^2}+1\right)}$$

(ввиду быстрой сходимости интеграла пределы интегрирования могут быть распространены до $\pm\infty$).

В области низких температур ($T\ll\Delta$) интеграл вычисляется просто [1]) и получается

$$\Delta=\Delta_0\left[1-\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}}\,e^{-\Delta_0/T}\right]. \qquad (40,2)$$

В области же вблизи точки перехода Δ мало, и первые члены разложения интеграла $I(\Delta/T)$ дают [2])

$$\ln\frac{\Delta_0}{\Delta}=\ln\frac{\pi T}{\gamma\Delta}+\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\frac{\Delta^2}{T^2}. \qquad (40,3)$$

Отсюда, прежде всего, видно, что Δ обращается в нуль при температуре

$$T_c=\gamma\Delta_0/\pi=0{,}57\Delta_0, \qquad (40,4)$$

---

[1]) При больших u первый член разложения $I(u)$ по $1/u$:

$$I(u)\approx\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{u}\exp\left[-u\left(1+\frac{x^2}{2u^2}\right)\right]=\left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2}e^{-u}.$$

[2]) Для разложения интеграла $I(u)$ при $u\to 0$ прибавляем и вычитаем из него интеграл

$$I_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}}-\frac{1}{x}\,\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right)dx.$$

малой по сравнению с температурой вырождения $T_0 \sim \mu$. После этого в первом порядке по $T_c - T$ получим

$$\Delta = T_c \left[\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\right]^{1/2} = 3{,}06 T_c \sqrt{1-\frac{T}{T_c}}. \qquad (40{,}5)$$

Нам осталось вычислить термодинамические величины газа. Рассмотрим сначала область низких температур.

Для вычисления теплоемкости в этой области проще всего исходить из формулы

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon (\delta n_{\mathbf{p}+} + \delta n_{\mathbf{p}-}) = 2\sum_{\mathbf{p}} \varepsilon \delta n_{\mathbf{p}}$$

для изменения полной энергии при варьировании чисел заполнения квазичастиц. Разделив на δT и перейдя от суммирования к интегрированию, получим теплоемкость:

$$C = V\frac{m p_F}{\pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \frac{\partial n}{\partial T}\, d\eta.$$

При $T \ll \Delta$ функция распределения квазичастиц $n \approx e^{-\varepsilon/T}$, а их энергия $\varepsilon \approx \Delta_0 + \eta^2/2\Delta_0$; простое интегрирование приводит

Тогда $I = I_1 + I_2$, где

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+u^2}}\operatorname{th}\frac{\sqrt{x^2+u^2}}{2}\right)dx.$$

В I_1 первый член в подынтегральном выражении интегрируется элементарно, а второй интегрируем по частям и находим

$$2I_1 = -\ln\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch}^2(x/2)}\,dx.$$

Стоящий здесь интеграл равен $2\ln(\pi/2\gamma)$ (где $\ln\gamma = C = 0{,}577$ — постоянная Эйлера), так что $2I_1 = \ln(\pi/\gamma u)$.

Интеграл I_2 обращается в нуль при $u=0$. Первый член его разложения по u^2:

$$I_2 = -\frac{u^2}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{x}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)'.$$

Подставляя сюда разложение

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = 4x\sum_{n=0}^{\infty}[\pi^2(2n+1)^2 + x^2]^{-1}$$

(его вывод см. в примечании на стр. 205) получим

$$2I_2 = 4u^2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{[(2n+1)^2\pi^2 + x^2]^2} = \frac{u^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-3} = u^2\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}.$$

к результату:

$$C = V \frac{\sqrt{2}mp_F\Delta_0^{5/2}}{\pi^{3/2}\hbar^3 T^{3/2}} e^{-\Delta_0/T}. \tag{40,6}$$

Таким образом, при $T \to 0$ теплоемкость убывает по экспоненциальному закону — прямое следствие наличия щели в энергетическом спектре.

Для дальнейших вычислений удобно исходить из термодинамического потенциала Ω, поскольку все рассмотрение ведется нами при заданном химическом потенциале системы (а не числа частиц в ней)[1]. Воспользуемся формулой

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right)_{T,V,\mu} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right\rangle, \tag{40,7}$$

где λ — какой-либо параметр, характеризующий систему (ср. V (11,4), (15,11)); в данном случае в качестве такого параметра выберем константу связи g, фигурирующую во втором члене гамильтониана (39,8). Среднее значение этого члена дается последним слагаемым в формуле (39,10), равном, согласно (39,12), $-V\Delta^2/g \propto g$. Поэтому имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial g} = -\frac{V\Delta^2}{g^2}.$$

При $g \to 0$ энергетическая щель Δ стремится к нулю. Поэтому, интегрируя это равенство по dg в пределах от 0 до g, найдем разность между термодинамическим потенциалом Ω в сверхтекучем состоянии и значением, которое он имел бы в нормальном состоянии ($\Delta = 0$) при той же температуре[2]:

$$\Omega_s - \Omega_n = -V \int_0^g \frac{\Delta^2}{g^2} dg. \tag{40,8}$$

Согласно общей теореме о малых добавках (см. V (24,16)), поправка (40,8), будучи выражена в соответствующих переменных, одинакова для всех термодинамических потенциалов.

---

[1]) Не смешивать химический потенциал газа как такового с (равным нулю) химическим потенциалом газа квазичастиц!

[2]) Здесь необходимо сделать замечание, связанное со сделанными нами с самого начала пренебрежениями. При $g = 0$ в гамильтониане (39,8) вообще не остается взаимодействия между частицами, и можно было бы подумать, что мы приходим к идеальному ферми-газу, а не «нормальному» неидеальному газу. В действительности, однако, в гамильтониане (39,8) уже были сделаны пренебрежения, после которых не может идти речи о вычислении абсолютной величины энергии. Были опущены члены взаимодействия (несущественные для нахождения формы спектра и разности $\Omega_s - \Omega_n$), которые дают вклад в энергию, большой по сравнению с экспоненциально малой величиной (40,8) (это как раз тот вклад, пропорциональный Ng, который дается формулой (6,13)).

При абсолютном нуле $\Delta=\Delta_0$, и, согласно (39,18), имеем

$$\frac{d\Delta_0}{dg}=\frac{2\pi^2\hbar^3\Delta_0}{mp_Fg^2}.$$

Переходя в (40,8) от интегрирования по dg к интегрированию по $d\Delta_0$, найдем следующее выражение для разности энергий основных уровней сверхтекучей и нормальной систем:

$$E_s-E_n=-V\frac{mp_F}{4\pi^2\hbar^3}\Delta_0^2. \tag{40,9}$$

Отрицательный знак этой разности и означает упомянутую в начале параграфа неустойчивость «нормального» основного состояния в случае притяжения между частицами газа. Отнесенная к одной частице, разность (40,9) составляет величину $\sim\Delta^2/\mu$.

Перейдем к обратному случаю, $T\to T_c$. Дифференцируя равенство (40,3) по g, находим

$$\frac{7\zeta(3)}{4\pi^2T^2}\Delta\,d\Delta=\frac{d\Delta_0}{\Delta_0}=\frac{2\pi^2\hbar^3}{mp_F}\frac{dg}{g^2}.$$

Подставим отсюда dg/g^2 в формулу (40,8) понимая ее как разность свободных энергий:

$$F_s-F_n=-V\frac{7\zeta(3)\,mp_F}{8\pi^4\hbar^3T^2}\int_0^\Delta\Delta^3\,d\Delta$$

и окончательно, с учетом (40,5),

$$F_s-F_n=-V\frac{2mp_FT_c^2}{7\zeta(3)\,\hbar^3}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2. \tag{40,10}$$

Отсюда разность энтропий:

$$S_s-S_n=-V\frac{4mp_FT_c}{7\zeta(3)\,\hbar^3}\left(1-\frac{T}{T_c}\right).$$

Разность же теплоемкостей стремится при $T\to T_c$ к конечному значению

$$C_s-C_n=V\frac{4mp_FT_c}{7\zeta(3)\,\hbar^3}, \tag{40,11}$$

т. е. в точке перехода испытывает скачок, причем $C_s>C_n$. Теплоемкость нормального состояния дается (в первом приближении) формулой идеального газа (см. V (58,6)); выраженная через p_F, она имеет вид $C_n=Vmp_FT/3\hbar^3$. Поэтому отношение теплоемкостей в точке перехода

$$\frac{C_s(T_c)}{C_n(T_c)}=\frac{12}{7\zeta(3)}+1=2{,}43. \tag{40,12}$$

В отношении своей сверхтекучести газ характеризуется разделением его плотности ρ на нормальную и сверхтекучую части. Согласно (23,6) нормальная часть плотности

$$\rho_n = -\frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3}\int p^4 \frac{dn}{d\varepsilon}\,dp \approx -\frac{p_F^4}{3\pi^2\hbar^3 v_F}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dn}{d\varepsilon}\,d\eta.$$

Полная же плотность газа связана с p_F посредством

$$\rho = \frac{mN}{V} = \frac{8\pi p_F^3 m}{3(2\pi\hbar)^3}.$$

Поэтому

$$\frac{\rho_n}{\rho} = -2\int\limits_0^{\infty}\frac{dn}{d\varepsilon}\,d\eta. \qquad (40,13)$$

Этот интеграл не требует особого вычисления, так как может быть сведен к известной уже функции $\Delta(T)$. Продифференцировав уравнение (40,1) по T и сравнив получающийся при этом интеграл с (40,13), можно убедиться в том, что

$$\frac{\rho}{\rho_n} = 1 - \frac{\Delta}{T\Delta'}. \qquad (40,14)$$

Подставив сюда предельные формулы (40,2), (40,5), получим

$$T \to 0:\ \frac{\rho_n}{\rho} = \left(\frac{2\pi\Delta_0}{T}\right)^{1/2} e^{-\Delta_0/T}, \qquad (40,15)$$

$$T \to T_c:\ \frac{\rho_s}{\rho} = 2\left(1 - \frac{T}{T_c}\right). \qquad (40,16)$$

Наконец, необходимо сделать еще два замечания относительно области справедливости полученных формул по температуре.

При приближении к точке перехода T_c становятся существенными процессы взаимодействия квазичастиц (не учитываемые в изложенной теории); именно эти процессы ответственны в данном случае за возникновение особенностей термодинамических величин, характерных для точки фазового перехода второго рода. В достаточной близости к этой точке полученные выше формулы должны в конце концов стать неприменимыми. Но в силу наличия малого параметра (константы связи g) в рассмотренной модели это наступает лишь при чрезвычайно малых значениях $T_c - T$; мы вернемся еще к более подробному обсуждению этого вопроса в § 45.

Как и в сверхтекучей бозе-жидкости, в рассматриваемом ферми-газе (в противоположность ферми-газу с отталкиванием — ср. § 4) может распространяться звук (со скоростью $u \sim p_F/m$, определяющейся обычным образом сжимаемостью среды). Это значит, что наряду с рассмотренным здесь спектром возбуждений фермиевского типа в спектре такого газа существует также и фононная, бозевская, ветвь возбуждений. Обусловленная фононами теплоемкость пропорциональна T^3 с малым коэффициентом, но при $T \to 0$ в конце концов она должна стать преобладающей над экспоненциально убывающей теплоемкостью (40,6).

§ 41. Гриновские функции сверхтекучего ферми-газа

Перейдем к построению математической техники гриновских функций в применении к сверхтекучим ферми-системам[1]).

Мы видели в § 26, что в терминах ψ-операторов бозе-эйнштейновская конденсация в бозе-системе выражается существованием отличных от нуля предельных (когда число частиц $N \to \infty$) значений матричных элементов, связывающих состояния, отличающиеся лишь изменением N на единицу. Физический смысл этого утверждения состоит в том, что удаление или прибавление одной частицы в конденсат не меняет состояния макроскопической системы.

В случае сверхтекучей ферми-системы то же самое должно относиться к конденсату из куперовских пар: состояние системы не должно меняться при изменении на единицу числа пар в конденсате. Математически это выражается в наличии отличных от нуля предельных ($N \to \infty$) значений матричных элементов у произведения $\hat{\Psi}_\beta(X_2)\hat{\Psi}_\alpha(X_1)$ — оператора уничтожения двух частиц, и у эрмитово-сопряженного ему оператора рождения пары частиц $\hat{\Psi}^+_\alpha(X_1)\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)$. Эти матричные элементы связывают «одинаковые» состояния систем, отличающиеся лишь удалением или прибавлением одной пары частиц:

$$\lim_{N\to\infty} \langle m, N|\hat{\Psi}_\beta(X_2)\hat{\Psi}_\alpha(X_1)|m, N+2\rangle =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \langle m, N+2|\hat{\Psi}^+_\alpha(X_1)\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)|m, N\rangle^* \neq 0. \qquad (41,1)$$

В дальнейшем мы будем опускать знак взятия предела; для краткости будем также опускать диагональный матричный индекс m, нумерующий «одинаковые» состояния систем с различными числами частиц.

Как и в случае бозе-систем (§ 31), в математическом аппарате гриновских функций для сверхтекучих ферми-систем фигурирует несколько различных функций. Наряду с обычной гриновской функцией

$$iG_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \langle N|\mathrm{T}\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)|N\rangle \qquad (41,2)$$

[1]) Излагаемая в этом параграфе техника принадлежит *Л. П. Горькову* (1958).