значит, что наряду с рассмотренным здесь спектром возбуждений фермиевского типа в спектре такого газа существует также и фононная, бозевская, ветвь возбуждений. Обусловленная фононами теплоемкость пропорциональна T^3 с малым коэффициентом, но при $T \to 0$ в конце концов она должна стать преобладающей над экспоненциально убывающей теплоемкостью (40,6).

§ 41. Гриновские функции сверхтекучего ферми-газа

Перейдем к построению математической техники гриновских функций в применении к сверхтекучим ферми-системам[1]).

Мы видели в § 26, что в терминах ψ-операторов бозе-эйнштейновская конденсация в бозе-системе выражается существованием отличных от нуля предельных (когда число частиц $N \to \infty$) значений матричных элементов, связывающих состояния, отличающиеся лишь изменением N на единицу. Физический смысл этого утверждения состоит в том, что удаление или прибавление одной частицы в конденсат не меняет состояния макроскопической системы.

В случае сверхтекучей ферми-системы то же самое должно относиться к конденсату из куперовских пар: состояние системы не должно меняться при изменении на единицу числа пар в конденсате. Математически это выражается в наличии отличных от нуля предельных ($N \to \infty$) значений матричных элементов у произведения $\hat{\Psi}_\beta(X_2)\hat{\Psi}_\alpha(X_1)$ — оператора уничтожения двух частиц, и у эрмитово-сопряженного ему оператора рождения пары частиц $\hat{\Psi}^+_\alpha(X_1)\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)$. Эти матричные элементы связывают «одинаковые» состояния систем, отличающиеся лишь удалением или прибавлением одной пары частиц:

$$\lim_{N\to\infty} \langle m, N|\hat{\Psi}_\beta(X_2)\hat{\Psi}_\alpha(X_1)|m, N+2\rangle =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \langle m, N+2|\hat{\Psi}^+_\alpha(X_1)\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)|m, N\rangle^* \neq 0. \qquad (41,1)$$

В дальнейшем мы будем опускать знак взятия предела; для краткости будем также опускать диагональный матричный индекс m, нумерующий «одинаковые» состояния систем с различными числами частиц.

Как и в случае бозе-систем (§ 31), в математическом аппарате гриновских функций для сверхтекучих ферми-систем фигурирует несколько различных функций. Наряду с обычной гриновской функцией

$$iG_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \langle N|\mathrm{T}\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\hat{\Psi}^+_\beta(X_2)|N\rangle \qquad (41,2)$$

[1]) Излагаемая в этом параграфе техника принадлежит *Л. П. Горькову* (1958).

необходимо ввести также и «аномальные» функции, согласно определениям,

$$iF_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \langle N | \mathrm{T}\hat{\Psi}_\alpha(X_1)\hat{\Psi}_\beta(X_2) | N+2\rangle,$$
$$iF^+_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \langle N+2 | \mathrm{T}\hat{\Psi}^+_\alpha(X_1)\hat{\Psi}^+_\beta(X_2) | N\rangle. \qquad (41,3)$$

Поскольку каждая из функций $F_{\alpha\beta}$ и $F^+_{\alpha\beta}$ строится из двух одинаковых операторов, то

$$F_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -F_{\beta\alpha}(X_2, X_1), \quad F^+_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -F^+_{\beta\alpha}(X_2, X_1) \qquad (41,4)$$

Напомним, что согласно основным принципам статистики результат статистического усреднения не зависит от того, производится ли оно по точной волновой функции стационарного состояния замкнутой системы или с помощью распределения Гиббса. Разница состоит лишь в том, что в первом случае результат усреднения будет выражен через энергию E и число частиц N, а во втором — через T и μ. Для следующих ниже в этом параграфе рассуждений более удобен первый способ.

В рассмотренной в § 39 модели ферми-газа связанные пары находятся в синглетном состоянии. Спиновая зависимость матричных элементов операторов рождения или уничтожения такой пары сводится к единичному антисимметричному спинору

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (41,5)$$

Напишем поэтому функции (41,3) в виде[1])

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}F(X_1, X_2), \quad F^+_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}F^+(X_1, X_2); \qquad (41,6)$$

при этом в силу (41,4) F и F^+ симметричны по X_1 и X_2. Спиновая же зависимость гриновской функции $G_{\alpha\beta}$ для неферромагнитной системы сводится к $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}G$. В однородной, макроскопически неподвижной системе гриновские функции G, F и F^+ зависят только от разностей координат точек и разности моментов времени (ср. примечание на стр. 150).

Подобно тому как введенная в § 26 функция $\Xi(X)$ имела смысл волновой функции частиц в конденсате, так функцию $F(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2)$ можно рассматривать как волновую функцию частиц, связанных в находящихся в конденсате куперовских парах. Тогда функция

$$\Xi(X) = iF(X, X) \qquad (41,7)$$

---

[1]) Ср. примечание на стр. 46. В то время как по своей спиновой структуре $G_{\alpha\beta}$ есть смешанный спинор второго ранга, функции $F_{\alpha\beta}$ и $F^+_{\alpha\beta}$ представляют собой соответственно контра- и ковариантный спиноры.

будет волновой функцией движения этих пар как целого. Из определений (41,3), (41,5) легко видеть, что при этом $F^+(X, X) = i\Xi^*(X)$. В стационарной, макроскопически неподвижной системе функция $\Xi(X)$ сводится к постоянной; надлежащим выбором фаз ψ-операторов можно сделать эту постоянную вещественной.

Вычислим теперь определенные таким образом гриновские функции для модели ферми-газа со слабым притяжением между частицами.

Гейзенберговский ψ-оператор удовлетворяет уравнению (7,8). Ввиду малости радиуса действия сил между частицами в рассматриваемом газе в интегральном члене этого уравнения можно взять значения множителей $\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}')$ в точке $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ и вынести их из-под знака интегрирования; тогда уравнение примет вид[1])

$$i\frac{\partial \hat{\Psi}_\alpha}{\partial t} = -\left(\frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)\hat{\Psi}_\alpha - g\hat{\Psi}^+_\gamma\hat{\Psi}_\gamma\hat{\Psi}_\alpha. \tag{41,8}$$

Эрмитовским сопряжением всех членов этого уравнения получим аналогичное уравнение для оператора $\hat{\Psi}^+$:

$$i\frac{\partial \hat{\Psi}^+_\alpha}{\partial t} = \left(\frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)\hat{\Psi}^+_\alpha + g\hat{\Psi}^+_\alpha\hat{\Psi}^+_\gamma\hat{\Psi}_\gamma. \tag{41,9}$$

Подставив выражение (41,8) в производную $\partial G_{\alpha\beta}/\partial t$ (9,5), получим уравнение

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)G_{\alpha\beta}(X - X') - \\ - ig\langle N|T\hat{\Psi}^+_\gamma(X)\hat{\Psi}_\gamma(X)\hat{\Psi}_\alpha(X)\hat{\Psi}^+_\beta(X')|N\rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(X - X') \tag{41,10}$$

(ср. (15,12)). Фигурирующий здесь диагональный матричный элемент произведения четырех ψ-операторов может быть расписан, согласно правилу умножения матриц, в виде суммы произведений матричных элементов двух пар операторов. Из всех таких произведений оставим лишь то, которое содержит матричные элементы для переходов с изменением числа частиц $N \leftrightarrow N + 2$, и опустим все остальные члены

$$\langle N|T\hat{\Psi}^+_\gamma\hat{\Psi}_\gamma\hat{\Psi}_\alpha\hat{\Psi}^{+\prime}_\beta|N\rangle \to \\ \to \langle N|T\hat{\Psi}_\gamma\hat{\Psi}_\alpha|N+2\rangle\langle N+2|T\hat{\Psi}^+_\gamma\hat{\Psi}^{+\prime}_\beta|N\rangle = \\ = -F_{\gamma\alpha}(X, X)F^+_{\gamma\beta}(X, X') = -\delta_{\alpha\beta}F(0)F^+(X - X') \tag{41,11}$$

[1]) Как и в § 39, пользуемся обозначением g для константы связи, совпадающей с постоянной $-U_0 = -\int U\,d^3x$. Оператор Лапласа пишем как ∇^2 во избежание путаницы со щелью Δ. В этом и следующем параграфах полагаем $\hbar = 1$.

(в последнем преобразовании использованы выражения (41,5)). Физически этот член отвечает спариванию частиц и по порядку величины совпадает с плотностью конденсата.

Подчеркнем, однако, принципиальное отличие от пренебрежений, которые делались в случае слабо неидеального бозе-газа. В последнем почти все частицы находятся при $T=0$ в конденсате, а число надконденсатных частиц, появляющихся только в результате слабого взаимодействия частиц, относительно мало. В данном же случае, напротив, сам конденсат появляется в результате слабого взаимодействия и потому включает в себя лишь малую долю частиц. Другими словами, отбрасываемые при замене (41,11) члены не малы, а велики по сравнению с оставленными. Последние, однако, приводят к качественно новому эффекту — изменению характера спектра, в то время как первые были бы нужны лишь для вычисления не интересующей нас здесь поправки к основному уровню системы (ср. в этой связи примечание на стр. 194).

После замены (41,11) уравнение (41,10) сводится к виду

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)G(X)+g\Xi F^{+}(X)=\delta^{(4)}(X) \qquad (41,12)$$

(аргумент функции $X-X'$ заменен на X, а постоянная $iF(0)$ обозначена через Ξ — в соответствии с определением (41,7)). Сюда входят две неизвестные функции $G(X)$ и $F^{+}(X)$, поэтому для их вычисления необходимо еще одно уравнение.

Его можно получить, вычисляя производную

$$i\frac{\partial F^{+}_{\alpha\beta}(X-X')}{\partial t}=\left\langle N+2\left|\mathrm{T}\frac{\partial\hat{\Psi}^{+}_{\alpha}(X)}{\partial t}\hat{\Psi}^{+}_{\beta}(X')\right|N\right\rangle;$$

член с δ-функцией (подобный второму члену в (9,5)) здесь не возникает, поскольку функция $F^{+}_{\alpha\beta}(X-X')$ (в противоположность функции $G_{\alpha\beta}(X-X')$) непрерывна при $t=t'$ [1]). Подставив сюда (41,9) и снова произведя выделение конденсатного члена, аналогичное (41,11), получим в результате уравнение

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\nabla^2}{2m}-\mu\right)F^{+}(X)+g\Xi^{*}G(X)=0. \qquad (41,13)$$

В него входят те же две функции G и F^{+}, что и в (41,12); поэтому эти два уравнения достаточны для вычисления этих функций (для вычисления же F надо было бы вывести аналогичным образом еще одно уравнение).

---

[1]) В этом легко убедиться, вычисляя скачок функции $F^{+}_{\alpha\beta}$ подобно тому, как это делалось в § 9 для $G_{\alpha\beta}$, и заметив, что операторы $\hat{\Psi}^{+}_{\alpha}(t, \mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}^{+}_{\beta}(t, \mathbf{r}')$ антикоммутативны.

Перейдем в этих уравнениях к импульсному представлению, введя обычным образом фурье-компоненты $G(P)$ и $F^+(P)$:

$$\begin{aligned}(\omega-\eta_p)\,G(P)+g\Xi F^+(P)&=1,\\ (\omega+\eta_p)\,F^+(P)+g\Xi^* G(P)&=0,\end{aligned} \tag{41,14}$$

где $P=(\omega, \mathbf{p})$ и $\eta_p=p^2/2m-\mu$. Отметим, что ввиду четности функции $F^+(X)$, четны также и ее фурье-компоненты $F^+(P)=F^+(-P)$.

Исключив из двух уравнений функцию F^+, найдем для G уравнение

$$(\omega^2-\eta_p^2-\Delta^2)\,G(P)=\omega+\eta_p, \tag{41,15}$$

где введено обозначение

$$\Delta=g\,|\,\Xi\,|. \tag{41,16}$$

Формальное решение уравнения (41,15):

$$G(P)=\frac{\omega+\eta_p}{\omega^2-\varepsilon^2(p)}=\frac{u_p^2}{\omega-\varepsilon(p)}+\frac{v_p^2}{\omega+\varepsilon(p)}, \tag{41,17}$$

где $\varepsilon(p)=\sqrt{\Delta^2+\eta_p^2}$, а u_p и v_p даются формулами (39,13). Уже отсюда видно, что спектр элементарных возбуждений, определяемый положительным полюсом функции Грина, дается функцией $\varepsilon(p)$ — мы снова приходим к результату (39,20). Мы видим также, что энергетическая щель Δ и модуль конденсатной волновой функции движения пар как целого оказываются пропорциональными друг другу величинами.

Выражение (41,17) для $G(P)$, однако, еще неполно: в нем не определен способ обхода полюсов. Другими словами, остается еще неопределенной мнимая часть функции G; эта часть содержит δ-функцию $\delta(\omega\pm\varepsilon)$ и потому выпадает при умножении на $\omega^2-\varepsilon^2$ в уравнении (41,15).

При $T=0$ правило обхода полюсов устанавливается прямым сравнением выражения (41,17) с разложением (8,7): в членах с положительными и отрицательными полюсами переменную надо заменить соответственно на $\omega+i0$ и $\omega-i0$; тогда (41,17) примет вид

$$G(\omega, \mathbf{p})=\frac{u_p^2}{\omega-\varepsilon(p)+i0}+\frac{v_p^2}{\omega+\varepsilon(p)-i0}=\frac{\omega+\eta_p}{(\omega-\varepsilon+i0)(\omega+\varepsilon-i0)}. \tag{41,18}$$

Выражая теперь F^+ из второго из уравнений (41,14), находим

$$F^+(\omega, \mathbf{p})=\frac{-g\Xi^*}{(\omega-\varepsilon+i0)(\omega+\varepsilon-i0)}. \tag{41,19}$$

С другой стороны, имеем, по определению,

$$i\Xi^* \equiv F^+(X=0) = \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^+(P)\frac{d\omega\, d^3p}{(2\pi)^4}. \qquad (41,20)$$

Подставим сюда (41,19); интегрирование по $d\omega$ осуществляется путем замыкания контура бесконечно удаленной полуокружностью в верхней полуплоскости, после чего интеграл выражается через вычет в полюсе $\omega=\varepsilon$. В результате, после сокращения на Ξ^*, получим равенство (39,16), определяющее Δ_0.

При $T\neq 0$ нахождение мнимой части гриновских функций несколько сложнее. Для построения функции $G(\omega, \mathbf{p})$ с правильными аналитическими свойствами по переменной ω напишем сначала запаздывающую функцию $G^R(\omega, \mathbf{p})$; она должна быть аналитична в верхней полуплоскости и потому получается из (41,17) заменой $\omega \to \omega+i0$. Мнимая часть этой функции:

$$\operatorname{Im} G^R = -\pi\left[u_p^2\delta(\omega-\varepsilon)+v_p^2\delta(\omega+\varepsilon)\right].$$

Мнимая же часть искомой функции G находится отсюда с помощью формулы (36,14), согласно которой

$$\operatorname{Im} G(\omega, \mathbf{p}) = \operatorname{th}\frac{\omega}{2T}\operatorname{Im} G^R(\omega, \mathbf{p}) =$$
$$= -(1-2n_{\mathbf{p}})\,\pi\left[u_p^2\delta(\omega-\varepsilon)-v_p^2\delta(\omega+\varepsilon)\right],$$

где $n_{\mathbf{p}}$ — фермиевская функция распределения (39,14) (использовав эту формулу, мы тем самым осуществляем переход от усреднения по заданному стационарному состоянию системы к усреднению по распределению Гиббса). Функцию G с этой мнимой частью можно записать в виде

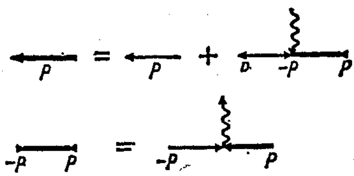
$$G(\omega, \mathbf{p}) = \frac{u_p^2}{\omega-\varepsilon+i0}+\frac{v_p^2}{\omega+\varepsilon-i0}+2\pi i n_{\mathbf{p}}\left[u_p^2\delta(\omega-\varepsilon)-v_p^2\delta(\omega+\varepsilon)\right]. \qquad (41,21)$$

Для функции же $F^+(\omega, \mathbf{p})$ находим теперь

$$F^+(\omega, \mathbf{p}) = F^+(\omega, \mathbf{p})\big|_{T=0} - \frac{i\pi g\Xi n_{\mathbf{p}}}{\varepsilon}\left[\delta(\omega-\varepsilon)+\delta(\omega+\varepsilon)\right], \qquad (41,22)$$

где первый член есть функция (41,19), относящаяся к $T=0$. Подставив это выражение в (41,20) и произведя интегрирование, мы вернемся к уравнению (39,15), определяющему $\Delta(T)$.

Уравнения (41,14) можно изобразить в диаграммном виде аналогично тому, как для сверхтекучей бозе-системы были представлены уравнения (33,7). При этом функции G, F, F^+ изображаются теми же графическими элементами (33,6) — одно- и двусторонними стрелками. Два уравнения (41,14) записываются в виде



(41,23)

Тонкой стрелке отвечает множитель $iG^{(0)}(P)$, где $G^{(0)}(P)$ — гриновская функция идеального ферми-газа. Входящей же в вершину и выходящей из нее волнистым линиям отвечают соответственно множители $ig\Xi$ и $-ig\Xi^*$. Сравнив (41,23) с (33,7), видим, что эти последние множители соответствуют собственно-энергетическим функциям $i\Sigma_{02}$ и $i\Sigma_{20}$, т. е. представляют собой первые приближения для этих величин. Отметим, что новыми элементами — двусторонними стрелками и волнистыми линиями — ограничиваются особенности диаграммной техники для сверхтекучих ферми-систем; в отличие от случая бозе-систем, «тройные» вершины здесь не возникают. Поэтому диаграммная техника оказывается здесь гораздо проще и ближе к «обычной», чем для сверхтекучих бозе-систем.

§ 42. Температурные гриновские функции сверхтекучего ферми-газа

В § 41 был определен энергетический спектр сверхтекучего ферми-газа путем использования обычных, «временных», гриновских функций. Однако для решения более сложных задач (и прежде всего для исследования свойств системы во внешних полях) более удобен математический аппарат температурных гриновских функций (*А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков*, 1958).

Температурная функция $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ определяется той же формулой (37,3), что и для нормального ферми-газа. Температурные же функции $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ и $\overline{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}$ (соответствующие временным функциям $F_{\alpha\beta}$ и $F^+_{\alpha\beta}$) определим аналогичными формулами

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) &= \sum_m \langle m, N | \hat{w} T_\tau \hat{\Psi}^M_{\alpha 1} \hat{\Psi}^M_{\beta 2} | m, N+2 \rangle, \\ \overline{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) &= \sum_m \langle m, N+2 | \hat{w} T_\tau \hat{\overline{\Psi}}^M_{\alpha 1} \hat{\overline{\Psi}}^M_{\beta 2} | m, N \rangle.\end{aligned} \qquad (42,1)$$

Спиновая зависимость этих функций отделяется (аналогично