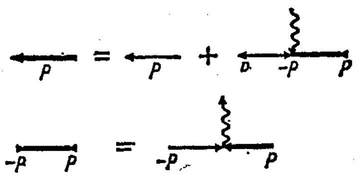
ставлены уравнения (33,7). При этом функции G, F, F^+ изображаются теми же графическими элементами (33,6) — одно- и двусторонними стрелками. Два уравнения (41,14) записываются в виде



(41,23)

Тонкой стрелке отвечает множитель $iG^{(0)}(P)$, где $G^{(0)}(P)$ — гриновская функция идеального ферми-газа. Входящей же в вершину и выходящей из нее волнистым линиям отвечают соответственно множители $ig\Xi$ и $-ig\Xi^*$. Сравнив (41,23) с (33,7), видим, что эти последние множители соответствуют собственно-энергетическим функциям $i\Sigma_{02}$ и $i\Sigma_{20}$, т. е. представляют собой первые приближения для этих величин. Отметим, что новыми элементами — двусторонними стрелками и волнистыми линиями — ограничиваются особенности диаграммной техники для сверхтекучих ферми-систем; в отличие от случая бозе-систем, «тройные» вершины здесь не возникают. Поэтому диаграммная техника оказывается здесь гораздо проще и ближе к «обычной», чем для сверхтекучих бозе-систем.

§ 42. Температурные гриновские функции сверхтекучего ферми-газа

В § 41 был определен энергетический спектр сверхтекучего ферми-газа путем использования обычных, «временных», гриновских функций. Однако для решения более сложных задач (и прежде всего для исследования свойств системы во внешних полях) более удобен математический аппарат температурных гриновских функций (*А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков*, 1958).

Температурная функция $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ определяется той же формулой (37,3), что и для нормального ферми-газа. Температурные же функции $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ и $\overline{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}$ (соответствующие временным функциям $F_{\alpha\beta}$ и $F^+_{\alpha\beta}$) определим аналогичными формулами

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) &= \sum_m \langle m, N | \hat{w} T_\tau \hat{\Psi}^M_{\alpha 1} \hat{\Psi}^M_{\beta 2} | m, N+2\rangle,\\ \overline{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_2, \mathbf{r}_2) &= \sum_m \langle m, N+2 | \hat{w} T_\tau \hat{\bar{\Psi}}^M_{\alpha 1} \hat{\bar{\Psi}}^M_{\beta 2} | m, N\rangle.\end{aligned} \qquad (42,1)$$

Спиновая зависимость этих функций отделяется (аналогично

(41,5)) в виде множителей $g_{\alpha\beta}$[1]):

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}\mathcal{F}, \quad \overline{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}\overline{\mathcal{F}}. \qquad (42,2)$$

Как и $\mathcal{G}$, функции $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ зависят только от разности $\tau=\tau_1-\tau_2$ и удовлетворяют соотношениям (37,6) (с верхним знаком):

$$\mathcal{F}(\tau)=-\mathcal{F}\left(\tau+\frac{1}{T}\right), \quad \overline{\mathcal{F}}(\tau)=-\mathcal{F}\left(\tau+\frac{1}{T}\right). \qquad (42,3)$$

Ряды Фурье по τ для этих функций содержат, следовательно, только нечетные «частоты» (37,8а): $\zeta_s=(2s+1)\pi T$.

Мацубаровские ψ-операторы при $\tau=0$ совпадают с гейзенберговскими при $t=0$:

$$\hat{\Psi}^M(\tau=0, \mathbf{r})=\hat{\Psi}(t=0, \mathbf{r}).$$

Сравнив определения функций $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$ с определениями F, F^+, найдем поэтому, что

$$\mathcal{F}(0, \mathbf{r}; 0, \mathbf{r})=\Xi(\mathbf{r}), \quad \overline{\mathcal{F}}(0, \mathbf{r}; 0, \mathbf{r})=\Xi^*(\mathbf{r}), \qquad (42,4)$$

где под Ξ надо понимать конденсатную волновую функцию, усредненную по Гиббсу, т. е. выраженную через температуру системы.

Покажем, каким образом с помощью температурных функций Грина можно снова получить энергетический спектр сверхтекучего ферми-газа при отличных от нуля температурах.

Уравнения для температурных функций $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$ выводятся в точности аналогично выводу уравнений (41,12—13), причем вместо дифференцирования по t производится дифференцирование по τ, а вместо уравнений (41,8—9) используются уравнения, отличающиеся от (41,8—9) заменой $it\rightarrow\tau$. Как и в (41,11), из среднего значения произведения четырех мацубаровских ψ-операторов выделяются члены, содержащие матричные элементы для переходов с изменением числа частиц на 2. В результате получим уравнения

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\mathcal{G}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')+g\Xi\overline{\mathcal{F}}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')=\delta(\tau-\tau')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
$$\qquad (42,5)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\overline{\mathcal{F}}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')-g\Xi^*\mathcal{G}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')=0.$$

---

[1]) Разные знаки в определениях $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ (в противоположность одинаковым знакам в (41,5)) целесообразны в связи с отсутствием в определениях (42,1) множителя i, который был в (41,3).

После перехода к фурье-компонентам эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} (i\zeta_s-\eta_p)\,\mathcal{G}(\zeta_s,\mathbf{p})+g\Xi\overline{\mathcal{F}}(\zeta_s,\mathbf{p})&=1,\\ -(i\zeta_s+\eta_p)\,\overline{\mathcal{F}}(\zeta_s,\mathbf{p})-g\Xi^*\mathcal{G}(\zeta_s,\mathbf{p})&=0. \end{aligned} \qquad (42,6)$$

Решение этих уравнений:

$$\mathcal{G}(\zeta_s,\mathbf{p})=-\frac{i\zeta_s+\eta_p}{\zeta_s^2+\varepsilon^2}, \qquad (42,7)$$

$$\overline{\mathcal{F}}(\zeta_s,\mathbf{p})=\frac{g\Xi^*}{\zeta_s^2+\varepsilon^2}=F^+(i\zeta_s,\mathbf{p}), \qquad (42,8)$$

где снова $\varepsilon^2=\Delta^2+\eta_p^2$, $\Delta=g\Xi$ (причем это решение определено однозначно и никаких δ-функций — как это было для функций G и F^+ — вообще не содержит).

Условие, определяющее энергетическую щель в спектре, получается теперь из равенства

$$\Xi^*=\overline{\mathcal{F}}(\tau=0,\mathbf{r}=0)=T\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int\overline{\mathcal{F}}(\zeta_s,\mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3},$$

или, после подстановки (42,8):

$$\frac{gT}{(2\pi)^3}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{\zeta_s^2+\varepsilon^2(p)}=1. \qquad (42,9)$$

Суммирование по s осуществляется формулой [1])

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}[(2s+1)^2\pi^2+a^2]^{-1}=\frac{1}{2a}\,\mathrm{th}\,\frac{a}{2} \qquad (42,10)$$

и приводит к равенству

$$\frac{g}{2}\int\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{th}\,\frac{\varepsilon}{2T}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3}=1, \qquad (42,11)$$

совпадающему с (39,15).

---

[1]) Эту формулу можно получить, написав

$$\frac{1}{(2s+1)^2\pi^2+a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+i\pi(2s+1)}+\frac{1}{a-i\pi(2s+1)}\right]=$$
$$=\frac{1}{2a}\int_0^{\infty}e^{-ax}\left[e^{-i\pi(2s+1)x}+e^{i\pi(2s+1)x}\right]dx$$

и произведя суммирование геометрической прогрессии под знаком интегрирования.