Что касается предположения о слабости взаимодействия, то реально для всех сверхпроводников

$$T_c \ll \hbar\omega_D \ll \mu. \qquad (43,2)$$

Сделанное в § 39 предположение, однако, подразумевает нечто большее: малость константы связи g, приводящую к большому значению безразмерного показателя экспоненты в (39,19). В данном случае это требование выражается условием

$$\ln(\hbar\omega_D/T_c) \gg 1 \qquad (43,3)$$

— должно быть велико не только отношение $\hbar\omega_D/T_c$, но и его логарифм. Это условие реально выполняется значительно хуже[1]).

С учетом всех реальных отличий электронной жидкости в металле от модели слабо неидеального ферми-газа теория сверхпроводимости становится очень сложной. В то же время оказывается, что уже простая теория, основанная на указанной модели, во многих отношениях хорошо описывает свойства сверхпроводников, причем не только качественно, но даже и количественно. Как уже упоминалось, эта теория была построена Бардином, Купером и Шриффером; в этой связи о модели ферми-газа со слабым притяжением между частицами говорят как о *модели БКШ*.

§ 44. Сверхпроводящий ток

Двум видам движения в электрически нейтральной сверхтекучей жидкости (жидкий гелий) отвечают в случае сверхпроводящего металла два вида электрических токов, могущих протекать в нем одновременно. *Сверхпроводящий ток* не переносит тепла и не сопровождается диссипацией энергии и может иметь место в термодинамически равновесной системе; *нормальный* же ток связан с выделением джоулева тепла. Будем обозначать плотности сверхпроводящего и нормального токов как $\mathbf{j}_s$ и $\mathbf{j}_n$; полная плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$.

Ряд важных заключений о свойствах сверхпроводящего тока можно сделать безотносительно к какой-либо частной модели уже из самого факта появления новой макроскопической величины — конденсатной волновой функции $\Xi(t, \mathbf{r})$.

Как и в § 26, введем фазу Φ этой функции:

$$\Xi(t, \mathbf{r}) = |\Xi| e^{i\Phi}. \qquad (44,1)$$

Подобно тому как в жидком гелии градиент фазы Φ определяет, согласно (26,12), скорость сверхтекучего движения $\mathbf{v}_s$, так

[1]) Отношение $\hbar\omega_D/T_c$ меняется в пределах от примерно 10 для Pb до 300 для Al и Cd.

в сверхпроводнике градиент фазы определяет наблюдаемую в этом случае величину — плотность сверхпроводящего тока. Ввиду анизотропии металла направление $\mathbf{j}_s$ не совпадает, вообще говоря, с направлением $\nabla\Phi$ и связь между компонентами этих векторов задается некоторым тензором второго ранга. Во избежание непринципиальных усложнений, однако, мы ограничимся здесь случаем кубической симметрии металлического кристалла.

Тогда тензор второго ранга сводится к скаляру, а связь между $\mathbf{j}_s$ и $\nabla\Phi$ — к простой пропорциональности. Запишем ее в виде

$$\mathbf{j}_s=\frac{e\hbar}{2m}n_s\nabla\Phi, \tag{44,2}$$

где, по определению, $e=-|e|$ — заряд электрона, а m — его (истинная) масса. Определенную таким образом величину n_s (функция температуры) называют *плотностью числа сверхпроводящих электронов*; эта величина играет здесь роль, аналогичную плотности сверхтекучей компоненты в жидком гелии. Подчеркнем, что она отнюдь не совпадает с плотностью конденсата куперовских пар — подобно тому, как в жидком гелии ρ_s не совпадает с плотностью конденсатных атомов [1]).

Формула (44,2) (как и формула (26,12) для жидкого гелия) предполагает достаточную медленность изменения фазы в пространстве. В то время, однако, как в случае бозе-жидкости требовалось малость изменения Φ лишь на межатомных расстояниях, здесь условие оказывается значительно более сильным. Роль характерного размера для сверхтекучей ферми-жидкости играет длина когерентности $\xi_0\sim\hbar v_F/\Delta_0$, и фаза Φ должна мало меняться именно на таком расстоянии (большом по сравнению с межатомными) [2]).

Связь между $\mathbf{j}_s$ и Φ усложняется, если сверхпроводник находится во внешнем магнитном поле; мы рассмотрим здесь случай постоянного (во времени) поля. Необходимые изменения, которые надо внести в формулу (44,2), можно выяснить исходя из требования калибровочной инвариантности теории.

Это требование состоит в том, что все наблюдаемые физические величины должны оставаться неизменными при калибро-

---

[1]) Коэффициент в (44,2) записан так, чтобы в свободном сверхтекучем ферми-газе (модель БКШ) mn_s совпадало с вычисленной в § 40 величиной ρ_s. Последняя определена таким образом, что ток $\mathbf{j}_s$ должен выражаться в виде $\mathbf{j}_s=en_s\mathbf{v}_s$, где $\mathbf{v}_s$ — скорость сверхтекучего движения. В свою очередь, $\mathbf{v}_s$ связана с градиентом фазы равенством $\mathbf{v}_s=(\hbar/2m)\nabla\Phi$; удвоенная масса $2m$ (вместо m в (26,12)) стоит здесь в связи с тем, что конденсат составлен из спаренных частиц.

[2]) Подчеркнем, что здесь фигурирует именно постоянный (не зависящий от температуры) параметр длины ξ_0; строгое обоснование этого критерия будет дано в дальнейшем (см. конец § 51).

вочном преобразовании векторного потенциала магнитного поля:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}), \tag{44,3}$$

где $\chi(\mathbf{r})$ — произвольная функция координат. При этом ψ-операторы преобразуются по закону, совпадающему с законом преобразования волновых функций:

$$\hat{\Psi} \to \hat{\Psi} \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi\right), \quad \hat{\Psi}^+ \to \hat{\Psi}^+ \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\chi\right), \tag{44,4}$$

где e — заряд частиц, описываемых ψ-оператором (см. III (111,9)) [1]). Гриновские же функции $G(X, X')$ и $F(X, X')$, как матричные элементы произведений $\hat{\Psi}\hat{\Psi}'^+$ или $\hat{\Psi}\hat{\Psi}'$, преобразуются согласно

$$\begin{aligned} G(X, X') &\to \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}[\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}')]\right\} G(X, X'), \\ F(X, X') &\to \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}[\chi(\mathbf{r}) + \chi(\mathbf{r}')]\right\} F(X, X'). \end{aligned} \tag{44,5}$$

При этом

$$\Xi = iF(X, X) \to \exp\left(\frac{2ie}{\hbar c}\chi\right)\Xi,$$

т. е. фаза конденсатной волновой функции

$$\Phi \to \Phi + \frac{2e}{\hbar c}\chi(\mathbf{r}). \tag{44,6}$$

Соотношение (44,2) не инвариантно по отношению к такому преобразованию фазы. Для достижения требуемой инвариантности оно должно быть дополнено членом, содержащим векторный потенциал магнитного поля:

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar e}{2m} n_s\left(\nabla\Phi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right). \tag{44,7}$$

В удвоении заряда (во втором члене в скобках) проявляется спаривание электронов в сверхпроводнике.

Уже это выражение достаточно для того, чтобы объяснить основное макроскопическое свойство сверхпроводника — вытеснение из него магнитного поля (*эффект Мейсснера*) [2]).

---

[1]) Благодаря тому, что во вторично-квантованный гамильтониан (7,7) ψ-операторы входят парами $\hat{\Psi}(X)$ и $\hat{\Psi}^+(X)$, он преобразуется при замене (44,3—4) так же, как и обычный гамильтониан при таком же преобразовании обычных (не операторных) волновых функций. Преобразование вида (44,3—4) было фактически использовано уже в § 19.

[2]) Феноменологическая электродинамика сверхпроводников изложена в другом томе этого курса — см. VIII глава VI.

Рассмотрим однородный сверхпроводник, находящийся в слабом магнитном поле,—величина поля предполагается малой по сравнению с критическим полем H_c, разрушающим сверхпроводимость. Этим условием исключается существенное влияние магнитного поля на величину n_s. Пусть тело находится в термодинамически равновесном состоянии, так что нормальный ток отсутствует и поэтому $\mathbf{j}_s=\mathbf{j}$[1]). Применив теперь к обоим сторонам равенства (44,7) операцию rot и заметив при этом, что $\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{B}$—магнитная индукция в теле, получим *уравнение Лондонов*

$$\operatorname{rot}\mathbf{j}=-\frac{e^2n_s}{mc}\mathbf{B} \qquad (44,8)$$

(*F. London*, *H. London*, 1935)[2]).

Это уравнение специфично для сверхпроводника. Используем также и общие уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad (44,9)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \qquad (44,10)$$

Подставив $\mathbf{j}$ из (44,9) в (44,8) и заметив, что в силу (44,10) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}=-\Delta\mathbf{B}$, получим уравнение для магнитного поля в сверхпроводнике

$$\Delta\mathbf{B}=\delta^{-2}\mathbf{B}, \qquad (44,11)$$

где введено обозначение

$$\delta^2=mc^2/4\pi e^2n_s. \qquad (44,12)$$

Найдем с помощью этого уравнения распределение поля в сверхпроводнике вблизи его поверхности, которую будем считать плоской; эту плоскость выбираем в качестве плоскости yz, а ось x направим внутрь тела. В этих условиях распределение поля зависит только от одной координаты x, и из (44,10) имеем $dB_x/dx=0$; из (44,11) автоматически следует тогда, что и $B_x=0$. Уравнение (44,11) принимает теперь вид $d^2\mathbf{B}/dx^2=\mathbf{B}/\delta^2$, откуда

$$\mathbf{B}(x)=\mathfrak{H}e^{-x/\delta}, \qquad (44,13)$$

где вектор $\mathfrak{H}$ параллелен поверхности.

Мы видим, что магнитное поле экспоненциально затухает в глубь сверхпроводника, проникая в него лишь на расстояния $\sim\delta$. Эта длина макроскопична, но мала по сравнению

---

[1]) Это будет предполагаться и везде ниже в этой главе, так что под $\mathbf{j}$ будет везде подразумеваться плотность сверхпроводящего тока.

[2]) Изложенный вывод уравнения (44,8) принадлежит *Л. Д. Ландау* (1941).

с обычными размерами массивных образцов ($\delta \sim 10^{-6}-10^{-5}$ см), так что поле проникает фактически лишь в тонкий поверхностный слой. Длину δ называют *лондоновской глубиной проникновения* поля. Подчеркнем, что она является непосредственно измеримой величиной, имеющей вполне определенный смысл,— в отличие от условного смысла параметра n_s.

Произведенный вывод нуждается, однако, в существенной оговорке. Исходная формула (44,7) применима лишь при условии достаточной медленности изменения всех величин в пространстве: характерные расстояния, на которых происходит существенное их изменение, должны быть велики по сравнению с длиной когерентности ξ_0 [1]). В данном случае это значит, что должно быть

$$\delta \gg \xi_0. \tag{44,14}$$

Это требование, разумеется, не бросает тени на самое доказательство факта вытеснения поля из сверхпроводника: предположение о невытеснении поля привело бы к логическому противоречию, так как его изменение в таком случае было бы заведомо медленным и уравнение (44,11) было бы применимо. Но конкретное уравнение (44,11) и следующий из него закон затухания поля (44,13) справедливы только при соблюдении условия (44,14).

Ситуацию, когда в сверхпроводнике выполняется неравенство $\delta \gg \xi_0$, называют *лондоновской*. В обратной же ситуации, когда $\delta \ll \xi_0$, говорят о *пиппардовском* случае (закон затухания поля в глубь сверхпроводника в этом случае будет рассмотрен в § 52). При $T \to T_c$ плотность сверхпроводящих электронов $n_s \to 0$, так что $\delta \to \infty$. Поэтому в достаточной близости к точке перехода ситуация всегда лондоновская. Но при $T \to 0$ соотношение между δ и ξ_0 зависит от конкретных свойств металла [2]).

Наконец, рассмотрим еще одно следствие выражения (44,7), не зависящее от соотношения между δ и ξ_0.

Как известно из макроскопической электродинамики сверхпроводников, если через отверстие сверхпроводящего тора проходит магнитный поток, то этот поток остается постоянным при любых изменениях состояния тела (не нарушающих его сверхпроводимости); при этом предполагается, что тор масси-

---

[1]) Напомним, что сама индукция **B** есть истинная микроскопическая напряженность магнитного поля, усредненная по физически бесконечно малым элементам объема, размеры которых велики лишь по сравнению с постоянной решетки.

[2]) Лондоновский случай во всей области температур имеет место, например, в чистых металлах переходных групп периодической системы, в некоторых интерметаллических соединениях. Пиппардовский случай имеет место (вдали от T_c) в чистых металлах непереходных групп.

вен — его диаметр и толщина велики по сравнению с длиной когерентности и глубиной проникновения поля. Покажем, что величина «вмерзшего» в отверстие тора магнитного потока может быть лишь целым кратным некоторого элементарного «кванта потока» (*F. London*, 1954).

В толще тела (вне области проникновения поля) плотность тока $\mathbf{j}=0$; векторный же потенциал отличен от нуля — равен нулю лишь его ротор, т. е. магнитная индукция $\mathbf{B}$. Выберем какой-либо замкнутый контур C, охватывающий собой отверстие тора и проходящий внутри тела вдали от его поверхности; таким выбором обеспечивается соблюдение условия применимости формулы (44,7) — достаточная медленность изменения фазы Φ и потенциала $\mathbf{A}$ в пространстве. Циркуляция вектора $\mathbf{A}$ вдоль контура C совпадает с потоком магнитной индукции через натянутую на контур поверхность, т. е. потоком ϕ через отверстие тора:

$$\oint \mathbf{A}\,d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{f} = \int \mathbf{B}\,d\mathbf{f} \equiv \phi.$$

С другой стороны, приравняв выражение (44,7) нулю и проинтегрировав его по контуру, получим

$$\oint \mathbf{A}\,d\mathbf{l} = \frac{\hbar c}{2e}\oint \nabla\Phi\cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar c}{2e}\,\delta\Phi,$$

где $\delta\Phi$ — изменение фазы волновой функции при обходе контура. Но из требования однозначности этой функции следует, что изменение фазы может быть лишь целым кратным от 2π. Таким образом, мы приходим к результату

$$\phi = n\phi_0, \qquad \phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{|e|} = 2\cdot 10^{-7}\ \text{гс}\cdot\text{см}^2, \tag{44,15}$$

где n — целое число. Величина ϕ_0 представляет собой элементарный *квант магнитного потока*.

Квантование магнитного потока имеет также и другой аспект: оно приводит к дискретности значений полного тока J, который может протекать (в отсутствие внешнего магнитного поля) по сверхпроводящему кольцу. Действительно, ток J создает магнитный поток через отверстие кольца, равный LJ/c, где L — коэффициент самоиндукции. Приравняв этот поток $n\phi_0$, находим, что ток может иметь значения

$$J = \frac{c\phi_0}{L}n = \frac{\pi\hbar c^2}{|e|\,L}n. \tag{44,16}$$

В противоположность кванту магнитного потока, «квант полного тока» зависит (вместе с самоиндукцией L) от формы и размеров кольца.

Задача

Определить магнитный момент сверхпроводящего шарика радиуса $R \ll \delta$, находящегося в магнитном поле, в лондоновском случае.

Решение. При $R \ll \delta$ можно считать магнитное поле внутри шарика постоянным и равным внешнему полю $\mathfrak{H}$. Если выбрать векторный потенциал в виде $\mathbf{A} = {}^1/_2\,[\mathfrak{H}\mathbf{r}]$, то можно положить просто

$$\mathbf{j} = -(n_s e^2/mc)\,\mathbf{A}$$

(т. е. положить в (44,7) $\Phi = 0$); граничное условие исчезновения нормальной составляющей тока ($\mathbf{nj} = 0$) на поверхности шарика выполняется тогда автоматически. Магнитный момент вычисляется как интеграл

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{rj}]\,dV$$

по объему шарика и равен

$$\mathbf{M} = -\frac{R^5}{30\delta^2}\mathfrak{H}.$$

§ 45. Уравнения Гинзбурга — Ландау

Полная теория, описывающая поведение сверхпроводника в магнитном поле, очень сложна. Ситуация, однако, существенно упрощается в области температур вблизи точки перехода. Здесь оказывается возможным построить систему относительно простых уравнений, причем применимых не только в слабых, но и в сильных полях[1]).

В общей теории Ландау фазовых переходов второго рода отличие «несимметричной» фазы от «симметричной» описывается параметром порядка, обращающимся в точке перехода в нуль (см. V § 142). Для сверхпроводящей фазы естественным таким параметром является конденсатная волновая функция Ξ. Во избежание излишних (с принципиальной точки зрения) усложнений будем считать симметрию металлического кристалла кубической; как было указано в § 44, в этом случае сверхпроводящее состояние характеризуется скалярной величиной n_s — плотностью сверхпроводящих электронов. Более удобным выбором параметра порядка в этом случае является величина (обозначим ее через ψ), пропорциональная Ξ, но нормированная условием $|\psi|^2 = n_s/2$. Фаза величины ψ совпадает с фазой функции Ξ:

$$\psi = \sqrt{\frac{n_s}{2}}\,e^{i\Phi}. \tag{45,1}$$

[1]) Излагаемая ниже теория принадлежит *В. Л. Гинзбургу* и *Л. Д. Ландау* (1950). Замечательно, что она была построена феноменологическим путем, еще до создания микроскопической теории сверхпроводимости.