чение поля для пленки $H_c^{(\text{пл})}$ есть то, при котором ψ обращается в нуль. Оно связано с критическим полем H_c массивного сверхпроводника равенством

$$H_c^{(\text{пл})} = \sqrt{24} H_c \delta / d.$$

В рассмотренных условиях разрушение сверхпроводимости полем происходит путем фазового перехода второго рода: ψ обращается в нуль при увеличении $\mathfrak{H}$ непрерывным образом. Это вполне естественно, поскольку при $d \ll \delta$ поле фактически проникает в сверхпроводящую пленку, так что нет причин для перехода первого рода, который как раз и состоял бы во внезапном проникновении поля в тело.

§ 46. Поверхностное натяжение на границе сверхпроводящей и нормальной фаз

Уравнения Гинзбурга—Ландау позволяют, в частности вычислить поверхностное натяжение на границе сверхпроводящей (s) и нормальной (n) фаз (в одном и том же образце), связав его с величинами, характеризующими объемные свойства вещества (*В. Л. Гинзбург*, *Л. Д. Ландау*, 1950). Напомним, что такие границы существуют в металлических образцах, находящихся в так называемом промежуточном состоянии в магнитном поле. Поскольку все отличие обоих фаз сводится к тому, что в одной из них $\psi \neq 0$, а в другой $\psi = 0$, то переход между ними совершается непрерывно в некотором слое и описывается уравнениями Гинзбурга—Ландау с граничными условиями, поставленными лишь на больших расстояниях по обе стороны этого слоя.

Рассмотрим плоскую границу раздела между n- и s-фазами металла. Выбрав эту границу в качестве плоскости yz, направим ось x в глубь s-фазы; распределение всех величин в обоих фазах зависит только от координаты x. Векторный потенциал поля, выбор которого оставался еще неоднозначным, подчиним калибровке, в которой $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; в данном случае это дает $dA_x/dx = 0$, откуда видно, что можно положить $A_x = 0$. Из соображений симметрии очевидно, что вектор $\mathbf{A}$ лежит везде в одной плоскости; пусть это будет плоскость xy, так что $A_y \equiv A$, тогда вектор индукции лежит в плоскости xz, причем

$$B \equiv B_z = A' \tag{46,1}$$

(штрих означает дифференцирование по x).

Далее, перепишем уравнение (45,13) в обычном в макроскопической электродинамике виде $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, введя напряженность поля $\mathbf{H}$ согласно[1])

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}, \quad c \operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{j}.$$

---

[1]) Напомним, во избежание недоразумений, что замечание в VIII § 41 о нецелесообразности введения величины $\mathbf{H}$ относилось к электродинамике сверхпроводников, в которой область проникновения магнитного поля рассматривалась как бесконечно тонкая. Уравнения же Гинзбурга—Ландау применяются именно к структуре этой области.

Из этого уравнения следует в данном случае, что $H = \mathrm{const}$. Вдали от границы раздела, в толще нормальной фазы индукция и напряженность совпадают, причем равны как раз критическому значению: $B = H = H_c$ (магнитной восприимчивостью нормальной фазы пренебрегаем). Поэтому и во всем пространстве будет $H \equiv H_z = H_c$.

Пренебрегая изменением плотности вещества при сверхпроводящем фазовом переходе, будем считать ее (наряду с температурой) постоянной вдоль всего тела[1]). Обозначим через f свободную энергию единицы объема (в отличие от свободной энергии F тела в целом). При постоянных температуре и плотности и при пренебрежении поверхностными эффектами дифференциал

$$df = \frac{\mathbf{H}}{4\pi} d\mathbf{B} \tag{46,2}$$

(см. VIII § 30). Отсюда видно, что дополнительное требование постоянства $\mathbf{B}$ привело бы в этих условиях также и к постоянству величины

$$\tilde{f} = f - \frac{\mathbf{HB}}{4\pi}. \tag{46,3}$$

Поэтому весь вклад в интеграл $\tilde{F} = \int \tilde{f}\, dV$, происходящий от переменной части $\tilde{F}$, обусловлен только наличием границы раздела. Отнеся этот вклад к единице площади границы, мы можем, следовательно, вычислить коэффициент поверхностного натяжения как интеграл

$$\alpha_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f} - \tilde{f}_n)\, dx, \tag{46,4}$$

где постоянная $\tilde{f}_n$ есть значение $\tilde{f}$ вдали от границы раздела, например, в глубине нормальной фазы.

Для нормальной фазы свободная энергия $f_n = f_{n0} + B^2/8\pi = f_{n0} + H_c^2/8\pi$, так что

$$\tilde{f}_n = f_n - \frac{H_c^2}{4\pi} = f_{n0} - \frac{H_c^2}{8\pi} = f_{n0} - \frac{a^2}{2b}$$

(в последнем равенстве учтено (45,9)). Величина же $\tilde{f}$ в произвольной точке выражается через плотность свободной энергии f согласно

$$\tilde{f} = f - \frac{H_c B}{4\pi}.$$

Воспользовавшись теперь выражением (45,10), приходим к

---

[1]) Строго говоря, при фазовом равновесии постоянен вдоль системы химический потенциал (а не плотность). С учетом изменения плотности надо было бы поэтому рассматривать не свободную энергию, а термодинамический потенциал Ω.

следующей формуле для поверхностного натяжения:

$$\alpha_{ns}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{B^2}{4\pi}+\frac{\hbar^2}{4m}\left(|\psi'|^2+\frac{4e^2}{\hbar^2c^2}A^2|\psi|^2\right)+\right.$$
$$\left.+a|\psi|^2+\frac{b}{2}|\psi|^4-\frac{H_cB}{4\pi}+\frac{a^2}{2b}\right\}dx. \quad (46,5)$$

Как и следовало, подынтегральное выражение обращается в нуль как в глубине нормальной фазы ($x\to-\infty$), где $\psi=0$, $B=H_c$, так и в глубине сверхпроводящей фазы ($x\to\infty$), где $|\psi|^2=-a/b$, $B=0$.

Обратим внимание на то, что в подынтегральном выражении в (46,5) выпал член $i\mathbf{A}\nabla\psi$ в результате равенства $A_x=0$. Такой же член выпадает из (45,12), так что остается уравнение с вещественными коэффициентами; поэтому решение этого уравнения может быть выбрано вещественным, что и предполагается ниже. При этом в выражении плотности тока (45,14) исчезает первый член и остается

$$\mathbf{j}=-\frac{2e^2}{mc}\psi^2\mathbf{A}. \quad (46,6)$$

Кроме того, введем вместо переменной x и функций $A(x)$, $\psi(x)$ безразмерные величины

$$\bar{x}=\frac{x}{\delta},\quad \bar{\psi}=\psi\sqrt{\frac{b}{|a|}},\quad \bar{A}=\frac{A}{H_c\delta},\quad \bar{B}=\frac{d\bar{A}}{d\bar{x}}=\frac{B}{H_c}. \quad (46,7)$$

Ниже в этом параграфе мы будем пользоваться только этими величинами, опуская для краткости черточки над буквами. Уравнение (45,12) в этих переменных принимает вид

$$\psi''=\varkappa^2\left[\left(\frac{A^2}{2}-1\right)\psi+\psi^3\right]. \quad (46,8)$$

Уравнение же (45,13) с $\mathbf{j}$ из (46,6) приводится к виду

$$A''=A\psi^2. \quad (46,9)$$

Граничные условия к этим уравнениям в рассматриваемой задаче (отвечающие n- и s-фазам при $x\to-\infty$ и $x\to\infty$):

$$\begin{aligned}&\psi=0,\quad B=A'=1\quad \text{при}\quad x=-\infty,\\ &\psi=1,\quad A'=0\quad\quad\ \ \text{при}\quad x=\infty.\end{aligned} \quad (46,10)$$

Легко проверить, что уравнения (46,8—9) имеют первый интеграл

$$2\varkappa^{-2}\psi'^2+(2-A^2)\psi^2-\psi^4+A'^2=\text{const}=1; \quad (46,11)$$

значение постоянной определено по граничным условиям[1]).

[1]) Из условия (46,10) автоматически следует, что при $x\to\pm\infty$ также и $\psi'=0$, а из этих же условий и уравнения (46,9)—что при $x\to\infty$ $A''=0$ и $A=0$ (определенное значение $A(\infty)$ оказывается результатом выбора вещественной ψ).

Наконец, выражение (46,5) принимает вид

$$\alpha_{ns}=\frac{\delta H_c^2}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{\varkappa^2}\psi'^2+(A^2-2)\psi^2+\psi^4+(A'-1)^2\right]dx=$$

$$=\frac{\delta H_c^2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{\varkappa^2}\psi'^2+A'(A'-1)\right]dx \qquad (46,12)$$

(при переходе ко второму равенству член ψ^4 выражен из (46,11)).

Приступим к исследованию написанных уравнений. Рассмотрим сначала случай $\varkappa\ll 1$ (обычно выполняющийся в сверхпроводящих чистых металлах). Это неравенство означает, что $\delta(T)\ll\ll\xi(T)$, т. е. магнитное поле существенно меняется на расстоянии, малом по сравнению с характерным расстоянием изменения функции $\psi(x)$.

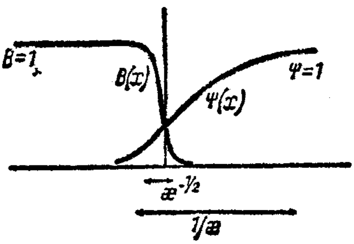

Рис. 6.

На рис. 6 схематически изображена картина распределения поля и ψ в этом случае. В области, где поле велико, имеем $\psi\approx 0$, затем поле резко спадает, а функция $\psi(x)$ начинает медленно (на расстояниях $x\sim 1/\varkappa$) меняться в отсутствие поля. Положив в (46,11) $A=0$, находим уравнение

$$\psi'=\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}(1-\psi^2),$$

которое должно быть решено при условии $\psi=0$ в точке $x=0$, выбранной где-то внутри области спадания поля. Такое решение есть

$$\psi=\operatorname{th}(\varkappa x/\sqrt{2}), \qquad (46,13)$$

а вычисление интеграла (46,12) с этой функцией (и $A=0$) дает

$$\alpha_{ns}=\frac{H_c^2\delta}{3\sqrt{2}\pi\varkappa}=\frac{H_c^2}{8\pi}\frac{1,9\delta}{\varkappa}. \qquad (46,14)$$

Погрешность этого значения происходит от пренебрежения здесь вкладом в интеграл от области, в которой спадает поле. Для оценки ширины δ_1 этой области[1]) замечаем, с одной сто-

[1]) Подчеркнем, что она не совпадает с глубиной проникновения поля в сверхпроводник из пустоты! В последнем случае в области проникновения поля $\psi\sim 1$, между тем как при проникновении из n-фазы поле спадает в области с малыми ψ.

роны, что, согласно уравнению (46,9), $\delta_1^{-2} \sim \psi^2$. С другой стороны, формула (46,13) должна оставаться, по порядку величины, справедливой и на границе области $x \sim \delta_1$, откуда $\psi \sim \varkappa\delta_1$. Из этих двух соотношений находим $\delta_1 \sim \varkappa^{-1/2}$. Вклад же в поверхностное натяжение от этой области оказывается $\sim H_c^2\delta\varkappa^{-1/2}$, т. е. мал по сравнению с (46,14) всего в отношении $\sim \varkappa^{1/2}$ (так что точность (46,14) сравнительно невелика).

При увеличении параметра $\varkappa$ коэффициент поверхностного натяжения проходит через нуль и становится отрицательным. Это видно уже из того, что неравенство $\alpha_{ns} < 0$ во всяком случае осуществляется при достаточно больших значениях $\varkappa$. Действительно, характерные расстояния изменения функции $\psi(x)$ в этой задаче не могут быть меньшими, чем для изменения $A(x)$, так как уже само по себе изменение A приводит к изменению ψ; поэтому при большом $\varkappa$ членом $\psi'^2/\varkappa^2$ под знаком интеграла в (46,12) можно пренебречь, а поскольку $0 < A' < 1$ (т. е. $0 < B < H_c$ в обычных единицах), то подынтегральное выражение оказывается отрицательным. Покажем, что обращение α_{ns} в нуль происходит при значении

$$\varkappa = 1/\sqrt{2}. \tag{46,15}$$

Для этого перепишем выражение для α_{ns} в виде

$$\alpha_{ns} = \frac{H_c^2\delta}{8\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [(A'-1)^2 - \psi^4]\, dx \tag{46,16}$$

(оно получается из первого интеграла (46,12) интегрированием члена ψ'^2 по частям с последующей подстановкой ψ'' из (46,8)). Интеграл заведомо обратится в нуль, если будет тождественно равно нулю подынтегральное выражение, т. е. если будет

$$A' - 1 = -\psi^2 \tag{46,17}$$

(обратный знак в этом равенстве невозможен, так как поле $B = A'$ должно убывать с увеличением x). Исключив ψ из (46,17) и (46,9), найдем уравнение

$$A'' = A(1 - A'), \tag{46,18}$$

решение которого (при граничных условиях $A' = 1$ при $x = -\infty$ и $A = 0$ при $x = \infty$) определит распределение поля; в силу (46,17) граничные условия (46,10) для ψ после этого выполнятся автоматически. Не решая уравнения (46,18) фактически, достаточно убедиться, что при $\varkappa^2 = 1/2$ будет автоматически удовлетворено также и неиспользованное еще уравнение (46,8), или, что то же, его первый интеграл (46,11). Подставив (46,17) в (46,9), получим $\psi' = -A\psi/2$; это значение ψ' вместе с A' из (46,17) действительно тождественно удовлетворяет равенству (46,11) с $\varkappa^2 = 1/2$.

Задача

Для сверхпроводника с параметром $\varkappa \ll 1$ найти первую поправку по полю к глубине проникновения в слабых полях.

Решение. Выберем поверхность сверхпроводника в качестве плоскости yz с осью z в направлении внешнего поля $\mathfrak{H}$, ось x направим внутрь тела. Распределение поля и ψ в сверхпроводнике определяется уравнениями (46,8—9), которые надо решать с граничными условиями

$$\psi' = 0, \quad B = A' = \mathfrak{H} \quad \text{при} \quad x = 0,$$
$$\psi' = 1, \quad A = 0 \quad \text{при} \quad x = \infty$$

(первое из них есть условие (45,15)). Ищем решение в виде

$$\psi = 1 + \psi_1(x), \qquad A = -\mathfrak{H}e^{-x} + A_1(x),$$

где ψ_1, A_1 — малые поправки к решению при $\varkappa = 0$, отвечающему затуханию поля по лондоновскому закону (44,13). Для поправки ψ_1 имеем уравнение

$$\psi_1'' = 2\varkappa^2\psi_1 + \frac{1}{2}\varkappa^2\mathfrak{H}^2e^{-2x},$$

откуда с учетом граничных условий

$$\psi_1 = \frac{1}{8}\varkappa^2\mathfrak{H}^2e^{-2x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\varkappa\mathfrak{H}^2e^{-\sqrt{2}\varkappa x}. \tag{1}$$

Теперь для A_1 пишем уравнение

$$A_1'' = A_1 - 2\mathfrak{H}e^{-x}\psi_1,$$

причем для ψ_1 сюда надо подставить только второй член из (1) первого порядка по $\varkappa$. С учетом граничного условия ($A_1' = 0$ при $x = 0$) и пренебрегая, где возможно, высшими по $\varkappa$ членами в коэффициентах, находим

$$A_1 = -\frac{1}{8}\mathfrak{H}^3\left[\left(1 + \varkappa\sqrt{2}\right)e^{-x} - e^{-(1+\sqrt{2}\varkappa)x}\right]. \tag{2}$$

Тем самым найдены поправки к закону затухания поля в глубь сверхпроводника. Эффективную глубину проникновения $\delta_{\text{эфф}}$ введем, согласно определению,

$$\mathfrak{H}\delta_{\text{эфф}} = \int_0^\infty B(x)\,dx = -A(0) = \mathfrak{H} - A_1(0).$$

Возвращаясь к обычным единицам, находим из (2)

$$\delta_{\text{эфф}} = \delta\left[1 + \frac{\varkappa}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\mathfrak{H}}{H_c}\right)^2\right].$$

§ 47. Два рода сверхпроводников

Знак поверхностного натяжения α_{ns} оказывает существенное влияние на свойства сверхпроводников. Это дает основание делить все сверхпроводники на две категории: сверхпроводники