в (46,9), получим $\psi' = -A\psi/2$; это значение ψ' вместе с A' из (46,17) действительно тождественно удовлетворяет равенству (46,11) с $\varkappa^2 = 1/2$.

Задача

Для сверхпроводника с параметром $\varkappa \ll 1$ найти первую поправку по полю к глубине проникновения в слабых полях.

Решение. Выберем поверхность сверхпроводника в качестве плоскости yz с осью z в направлении внешнего поля $\mathfrak{H}$, ось x направим внутрь тела. Распределение поля и ψ в сверхпроводнике определяется уравнениями (46,8—9), которые надо решать с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\psi' = 0, \quad B = A' = \mathfrak{H} \quad \text{при} \quad x = 0, \\ &\psi' = 1, \quad A = 0 \quad \text{при} \quad x = \infty \end{aligned}$$

(первое из них есть условие (45,15)). Ищем решение в виде

$$\psi = 1 + \psi_1(x), \quad A = -\mathfrak{H}e^{-x} + A_1(x),$$

где ψ_1, A_1—малые поправки к решению при $\varkappa = 0$, отвечающему затуханию поля по лондоновскому закону (44,13). Для поправки ψ_1 имеем уравнение

$$\psi_1'' = 2\varkappa^2\psi_1 + \frac{1}{2}\varkappa^2\mathfrak{H}^2 e^{-2x},$$

откуда с учетом граничных условий

$$\psi_1 = \frac{1}{8}\varkappa^2\mathfrak{H}^2 e^{-2x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\varkappa\mathfrak{H}^2 e^{-\sqrt{2}\varkappa x}. \tag{1}$$

Теперь для A_1 пишем уравнение

$$A_1'' = A_1 - 2\mathfrak{H}e^{-x}\psi_1,$$

причем для ψ_1 сюда надо подставить только второй член из (1) первого порядка по $\varkappa$. С учетом граничного условия ($A_1' = 0$ при $x = 0$) и пренебрегая, где возможно, высшими по $\varkappa$ членами в коэффициентах, находим

$$A_1 = -\frac{1}{8}\mathfrak{H}^3\left[\left(1 + \varkappa\sqrt{2}\right)e^{-x} - e^{-(1+\sqrt{2}\varkappa)x}\right]. \tag{2}$$

Тем самым найдены поправки к закону затухания поля в глубь сверхпроводника. Эффективную глубину проникновения $\delta_{эфф}$ введем, согласно определению,

$$\mathfrak{H}\delta_{эфф} = \int_0^\infty B(x)\,dx = -A(0) = \mathfrak{H} - A_1(0).$$

Возвращаясь к обычным единицам, находим из (2)

$$\delta_{эфф} = \delta\left[1 + \frac{\varkappa}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\mathfrak{H}}{H_c}\right)^2\right].$$

§ 47. Два рода сверхпроводников

Знак поверхностного натяжения α_{ns} оказывает существенное влияние на свойства сверхпроводников. Это дает основание делить все сверхпроводники на две категории: сверхпроводники *первого рода* с $\alpha_{ns} > 0$ и *второго рода* — с $\alpha_{ns} < 0$. Поскольку знак α_{ns} определяется значением параметра Гинзбурга — Ландау $\varkappa$, то первым отвечают (вблизи T_c) значения $\varkappa < 1/\sqrt{2}$, а вторым $\varkappa > 1/\sqrt{2}$[1]).

Рассмотрим массивный цилиндрический сверхпроводник во внешнем продольном магнитном поле $\mathfrak{H}$. Если сверхпроводник относится к первому роду, то при увеличении поля он испытывает фазовый переход первого рода, когда поле достигает критического значения H_c. Роль поверхностного натяжения сводится при этом (как и при всяком фазовом переходе первого рода) лишь к затруднению образования первых зародышей новой фазы и тем самым — к возможности метастабильного сохранения s-фазы при полях, несколько превышающих H_c.

Если же сверхпроводник относится ко второму роду, то уже до достижения полем значения H_c в нем может оказаться термодинамически выгодным возникновение «вкраплений» n-фазы; увеличение объемной энергии компенсируется отрицательной энергией поверхности такого зародыша. Нижнюю границу значений поля, при которых это становится возможным, принято обозначать как H_{c1} и называть *нижним критическим полем*. Аналогичным образом, начав с металла в нормальном состоянии при большом внешнем поле, мы придем к некоторому значению $H_{c2} > H_c$ (*верхнее критическое поле*), за которым термодинамически выгодно возникновение «вкраплений» s-фазы — снова за счет выигрыша в отрицательной энергии границ. Таким образом, в определенном интервале полей, $H_{c1} < \mathfrak{H} < H_{c2}$, сверхпроводник находится, как говорят, в *смешанном состоянии*[2]). Его свойства в этом состоянии постепенно меняются от чисто сверхпроводящего при H_{c1} до чисто нормального при H_{c2}; в то же время происходит постепенное проникновение в него магнитного поля. Значение же H_c, определяемое лишь соотношением между объемными энергиями n- и s-фаз, само по себе в этом случае ничем не замечательно.

Оба критических поля зависят, конечно, от температуры и обращаются в нуль при $T = T_c$. Это приводит к фазовой диаграмме для сверхпроводников второго рода, изображенного на рис. 7 вида (о пунктирной кривой на этом рисунке — см. ниже).

Верхнее критическое поле оказывается возможным определить (в рамках теории Гинзбурга — Ландау) даже без предва-

---

[1]) К первому роду относятся сверхпроводящие чистые металлические элементы. Ко второму роду относятся сверхпроводящие сплавы. Предположение о том, что в сплавах $\varkappa > 1/\sqrt{2}$, впервые было высказано *Л. Д. Ландау*.

[2]) Не путать его с промежуточным состоянием сверхпроводников первого рода, возникающим при определенных конфигурациях образца и внешнего магнитного поля!

рительного выяснения характера структуры смешанного состояния. Достаточно заметить, что при полях, несколько меньших H_{c2}, зародыши s-фазы могут иметь лишь малые значения параметра порядка ψ (очевидно, что $\psi\to 0$ при $\mathfrak{H}\to H_{c2}$). Поэтому состояние этих зародышей может быть описано уравнениями Гинзбурга—Ландау, линеаризованными по ψ. Опустив в (45,12) нелинейный член, приходим к уравнению

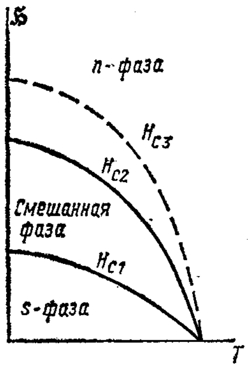

Рис. 7.

$$\frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi=|a|\psi, \qquad (47,1)$$

причем под $\mathbf{A}$ можно понимать векторный потенциал однородного поля $\mathfrak{H}$ при $\psi=0$, когда тело находится в нормальном состоянии с полностью проникшим в него внешним полем.

Но (47,1) по своей форме есть просто уравнение Шредингера для частицы с массой $2m$ и зарядом $2e$ в магнитном поле, причем $|a|$ играет роль уровня энергии; совпадают и граничные условия в обоих задачах: $\psi=0$ на бесконечности. Как известно (см. III § 112), минимальное значение энергии частицы, движущейся в однородном магнитном поле, есть $E_0=\hbar\omega_H/2$, где $\omega_H=2|e|\mathfrak{H}/2mc$ (от этого значения начинается непрерывный спектр энергий). Из аналогии между обоими задачами следует поэтому, что описываемые уравнением (47,1) зародыши s-фазы могут существовать только при

$$|a|>\frac{|e|\hbar}{2mc}\mathfrak{H},$$

так что критическое поле $H_{c2}=2mc|a|/|e|\hbar$. С помощью выражений (45,9), (45,17—18) эта формула может быть записана как

$$H_{c2}=\sqrt{2}\varkappa H_c \qquad (47,2)$$

(*А. А. Абрикосов*, 1952).

Решение уравнения (47,1) с граничным условием $\psi=0$, поставленным на бесконечности, отвечает образованию зародыша s-фазы в толще образца, вдали от его поверхности. Покажем, что наличие поверхности способствует образованию зародыша, в результате чего они могут возникать в тонком поверхностном слое уже при $\mathfrak{H}>H_{c2}$ (*D. Saint-James, P. G. De Gennes*, 1963).

Решение уравнения (47,1), описывающее зародыш s-фазы вблизи поверхности тела (которую считаем плоской), должно удовлетворять на ней граничному условию $\partial\psi/\partial x=0$, где x — координата в направлении нормали к поверхности (условие (45,15) при $A_x = 0$). Для установления нужной квантовомеханической аналогии вспомним, что использованная выше задача о движении частиц в однородном магнитном поле, в свою очередь, эквивалентна задаче о движении в одномерной параболической потенциальной яме

$$U = \frac{2m}{2} \omega_H^2 (x - x_0)^2,$$

где x_0 — постоянная, отвечающая «центру орбиты» (см. III § 112). Рассмотрим теперь двойную яму, составленную из двух одинаковых параболических ям, расположенных симметрично относительно плоскости $x = 0$ (рис. 8). Основному состоянию частицы в таком поле отвечает волновая функция $\psi(x)$, не имеющая нулей и четная по x; такая функция автоматически удовлетворяет условию $\psi' = 0$ при $x = 0$. В то же время основной уровень частицы в двойной яме лежит ниже уровня в одиночной яме[1]); в переносе на задачу о зародышах этим доказывается сделанное выше утверждение об облегчении их образования вблизи поверхности.

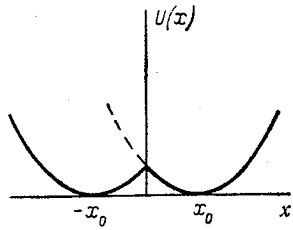

Рис. 8.

Численный расчет уровня в двойной яме приводит к результату, что его минимальное (в зависимости от параметра x_0) значение составляет $0{,}59E_0$. Повторив рассуждения, приводящие к формуле (47,2), найдем, что верхний предел полей, в которых возникают поверхностные зародыши s-фазы, лежит при $H_{c3} = H_{c2}/0{,}59$, т. е.

$$H_{c3} = 1{,}7H_{c2} = 2{,}4\varkappa H_c. \tag{47,3}$$

Таким образом, в области полей между H_{c2} и H_{c3} возникает явление поверхностной сверхпроводимости; граница этой области показана на рис. 7 пунктирной линией. Толщина сверхпроводящего слоя у поверхности нормальной фазы — порядка величины $\xi(T)$. Эту оценку легко получить из той же квантовомеханической аналогии: волновая функция частицы в потенциальной яме (на уровне E_0) сосредоточена в области $x \sim \hbar/\sqrt{mE_0}$; соответствующий размер зародыша получается заменой E_0 на $|a|$ и (согласно (45,17)) совпадает с $\xi(T)$.

Все сказанное выше относится к сверхпроводникам второго рода. Но введенные таким образом критические поля H_{c2} и H_{c3}

---

[1]) Это связано с понижением потенциальной энергии в полупространстве $x < 0$ по сравнению с той, которая была бы при одиночной яме (пунктирная линия на рис. 8). См., например, III § 50, задача 3.

могут иметь определенный физический смысл и для сверхпроводников первого рода.

Если $\varkappa$ лежит в интервале $1/\sqrt{2}=0{,}71>\varkappa>0{,}59/\sqrt{2}=0{,}42$, то $H_{c2}<H_c$, но $H_{c3}>H_c$. Хотя смешанная фаза в этом случае не возникает, но в интервале полей между H_c и H_{c3} существует поверхностная сверхпроводимость.

Наконец, по смыслу произведенного вывода, значение H_{c2} (47,2) определяет (при любом $\varkappa$) верхнюю границу полей, в которых возможно образование зародышей s-фазы со сколь угодно малыми ψ. Поэтому в сверхпроводнике первого рода (где $H_{c2}<H_c$) в полях $\mathfrak{H}<H_{c2}$ термодинамически невыгодная нормальная фаза абсолютно неустойчива. В интервале же $H_{2c}<\mathfrak{H}<H_c$ нормальная фаза может существовать как метастабильная: фазовый переход первого рода из n- в s-фазу в этой области может произойти только путем возникновения зародышей s-фазы с конечными значениями ψ, затрудненного положительным поверхностным натяжением на их границе (*В. Л. Гинзбург*, 1956).

Задача

Определить критическое поле для сверхпроводящего шарика малого радиуса $R\ll\delta$ (*В. Л. Гинзбург*, 1958).

Решение. В этом случае (как и в тонкой пленке — см. задачу в § 45) разрушение сверхпроводимости происходит путем фазового перехода второго рода. Критическое поле для шарика можно найти как значение, ниже которого n-фаза теряет устойчивость по отношению к образованию зародышей s-фазы. Как и в тексте, это сводится к нахождению наименьшего собственного значения уравнения Шредингера (47,1). При условии $R\ll\delta$ последнее можно искать с помощью теории возмущений по отношению к внешнему полю, причем невозмущенная волновая функция $\psi=\mathrm{const}$ (зародыш занимает весь объем шарика). Собственное значение определяется тогда просто как среднее значение оператора возмущения $(2e\mathbf{A}/c)^2/4m$ (среднее же значение от оператора $(ie\hbar/mc)(\mathbf{A}\nabla)$ при $\psi=\mathrm{const}$ равно нулю). При этом векторный потенциал однородного поля должен быть выбран в виде $\mathbf{A}=[\mathfrak{H}\mathbf{r}]/2$; именно при такой калибровке решение $\psi=\mathrm{const}$ удовлетворяет на поверхности шарика граничному условию (45,15), сводящемуся к требованию $\mathbf{nA}=0$. Произведя усреднение, найдем

$$E_0=\frac{e^2}{4mc^2}\,\frac{2}{3}\,\mathfrak{H}^2\overline{r^2}=\frac{e^2\mathfrak{H}^2R^2}{10mc^2}.$$

Критическое поле определяется (как и в тексте) условием $E_0=|a|$, приводящим к результату

$$H_c^{(\text{шар})}=\sqrt{20}\,H_c\delta/R.$$

Допустимость использования теории возмущений подтверждается тем, что найденное значение E_0 (при $\mathfrak{H}=H_c^{(\text{шар})}$) при условии $R\ll\delta$ действительно мало по сравнению со следующим собственным значением, которое соответствовало бы уже переменной в объеме шарика волновой функции и имело бы порядок величины $\hbar^2/mR^2$.