определяет искомую зависимость $\overline{B}(\mathfrak{H})$. Отметим, что при $\mathfrak{H}\to H_{c1}$ производная $d\overline{B}/d\mathfrak{H}$ стремится к бесконечности по закону

$$\frac{d\overline{B}}{d\mathfrak{H}} \backsim \frac{1}{\mathfrak{H}-H_{c1}} \ln^{-3}\frac{1}{\mathfrak{H}-H_{c1}}.$$

§ 49. Диамагнитная восприимчивость выше точки перехода

В конце § 45 уже было отмечено, что область температур вблизи T_c, в которой флуктуации параметра порядка ψ становятся большими, в сверхпроводнике чрезвычайно узка. Вне этой области флуктуационные поправки к термодинамическим величинам, вообще говоря, очень малы. Они могут, однако, оказаться существенными для магнитной восприимчивости металла выше точки перехода: появление вследствие флуктуаций даже относительно малого числа сверхпроводящих электронов может привести к вкладу в магнитную восприимчивость, превышающему обычно очень малую восприимчивость нормального металла вдали от точки перехода[1]).

Рассмотрим металл в слабом ($\mathfrak{H}\ll H_c$) внешнем магнитном поле при температуре выше точки T_c, но близкой к ней. Равновесное значение параметра порядка здесь $\psi=0$, а для вычисления его флуктуаций можно использовать свободную энергию из теории Гинзбурга—Ландау. При этом в выражении (45,10) можно, в виду малости флуктуаций, сохранить только квадратичные по ψ члены, опустив член с $|\psi|^4$ и понимая под $\mathbf{A}$ векторный потенциал однородного поля $\mathfrak{H}$. Флуктуации индукции $\mathbf{B}$, связанные с флуктуациями ψ, квадратичны по ψ (ввиду квадратичности плотности тока $\mathbf{j}$). Поэтому в члене $\mathbf{B}^2/8\pi$ можно понимать под $\mathbf{B}$ среднее (термодинамическое) значение индукции, пренебрегая ее флуктуациями. Таким образом, изменение полной свободной энергии металла при флуктуации дается следующим выражением—функционалом от ψ[2]):

$$\Delta F[\psi]=\int\left\{\frac{1}{4m}\left|\left(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)\psi\right|^2+a|\psi|^2\right\}dV. \qquad (49,1)$$

Для вычисления флуктуационного вклада ΔF в свободную энергию надо рассматривать функционал (49,1) как «эффектив-

[1]) Этот эффект был указан *В. В. Шмидтом* (1966).

[2]) Во избежание недоразумений подчеркнем, что магнитное поле не является по отношению к сверхпроводнику «внешним полем» h в том смысле, как оно было введено в V § 144. Последнее должно было бы входить в свободную энергию в виде члена $-h(\psi+\psi^*)$, что в данном случае заведомо невозможно ввиду неинвариантности такого члена по отношению к выбору фазы ψ.

ный гамильтониан», определяющий ΔF согласно формуле

$$\exp\left(-\frac{\Delta F}{T}\right)=\int \exp\left(-\frac{\Delta F[\psi]}{T}\right)D\psi, \qquad (49,2)$$

где интегрирование (функциональное) производится по всем распределениям $\psi(\mathbf{r})$ (см. V § 147). Фактически оно осуществляется путем разложения ψ по некоторой полной системе собственных функций и интегрированием по бесконечному множеству коэффициентов этого разложения. В случае однородной (без внешнего поля) системы разложение производится просто по плоским волнам (см., например, задачу в V § 147).

В данном же случае разложение следует производить по собственным функциям «уравнения Шредингера»

$$\frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi=E\psi, \qquad (49,3)$$

отвечающего гамильтониану (49,1). В § 47 уже было отмечено, что это уравнение формально совпадает с уравнением Шредингера для движения частицы (с массой $2m$ и зарядом $2e$) в однородном магнитном поле. Его собственные функции нумеруются одним дискретным (n) и двумя непрерывными (p_x, p_z) квантовыми числами, причем собственные значения зависят только от n и p_z (ось z в направлении $\mathfrak{H}$) и даются формулой

$$E\left(n+\frac{1}{2},\ p_z\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{|e|\hbar}{mc}\mathfrak{H}+\frac{p_z^2}{4m}; \qquad (49,4)$$

число различных собственных функций с заданным n, значением p_z в интервале dp_z и всеми возможными p_x есть

$$V\frac{2|e|\mathfrak{H}}{(2\pi\hbar)^2c}dp_z$$

(см. III § 112).

Обозначим, для краткости, совокупность чисел n, p_z, p_x одним символом q и напишем разложение функции $\psi(\mathbf{r})$ в виде

$$\psi=\sum_q c_q\psi_q(\mathbf{r}), \qquad (49,5)$$

где $c_q=c'_q+ic''_q$ — произвольные комплексные коэффициенты, а собственные функции предполагаются нормированными условием $\int|\psi_q|^2dV=1$ (интегрирование производится по объему металла).

Подстановка разложения (49,5) в (49,1) позволяет прежде всего перейти от интегрирования по объему к суммированию по q. Действительно, проинтегрировав первый член по частям, приводим (49,1) к виду

$$\Delta F[\psi]=\int\left\{\psi^*\frac{1}{4m}\left(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi+\psi^*a\psi\right\}dV.$$

Подставив сюда (49,5) и учтя, что каждая из функций ψ_q удовлетворяет уравнению (49,3) с $E=E_q$ и что собственные функции с различными q взаимно ортогональны, получим

$$\Delta F[\psi]=\sum_q |c_q|^2 (E_q+a). \tag{49,6}$$

Функциональное интегрирование в (49,2) означает интегрирование по всем $dc'_q dc''_q$. После подстановки (49,6) интегрирования по всем этим переменным разделяются и дают

$$\exp\left(-\frac{\Delta F}{T}\right)=\prod_q \frac{\pi T}{E_q+a},$$

или

$$\Delta F=-T\sum_q \ln\frac{\pi T}{E_q+a}. \tag{49,7}$$

В терминах квантовых чисел n и p_z это выражение записывается как

$$\Delta F=-V\frac{2|e|T\mathfrak{H}}{(2\pi\hbar)^2 c}\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{\pi T}{E(p_z,\ n+{}^1/{}_2)+a}\,dp_z. \tag{49,8}$$

Эта сумма расходится при больших E, но расходимость в действительности фиктивна и связана лишь с тем, что исходная формула (49,1) применима только при медленно меняющихся функциях $\psi(\mathbf{r})$: изменение ψ должно быть мало на расстояниях $\sim\xi_0$. В терминах собственных значений E_q это значит, что допустимы лишь $E_q \ll \hbar^2/m\xi_0^2$. Обрезав сумму по n при некотором большом N, удовлетворяющем поставленному условию, воспользуемся формулой Пуассона

$$\sum_{n=0}^{N} f\left(n+\frac{1}{2}\right) \approx \int_0^N f(x)\,dx-\frac{1}{24} f'(x)\Big|_0^N$$

(см. V (59,10)). В применении к (49,8) первый, интегральный, член этой формулы дает, как легко понять, не зависящий от $\mathfrak{H}$ вклад в свободную энергию; этот член не нужен для вычисления магнитной восприимчивости, и мы его опустим. Во втором же члене можно положить теперь $N\to\infty$ (так что параметр обрезания выпадает из ответа)[1]):

$$\Delta F=V\frac{e^2 T_c \mathfrak{H}^2}{48\pi^2\hbar m c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{a+p_z^2/4m}.$$

[1]) В коэффициенте положено $T\approx T_c$. При T вблизи T_c существенные в этом интеграле значения $p_z\sim\sqrt{ma}\sim\hbar/\xi(T)\ll\hbar/\xi_0$, т. е. удовлетворяют поставленному требованию.

Окончательно, после взятия интеграла,

$$\Delta F = V \frac{e^2 T_c \mathfrak{H}^2}{24\pi\hbar c^2 \sqrt{m a}}. \tag{49,9}$$

Отсюда магнитная восприимчивость

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial \mathfrak{H}^2} = -\frac{e^2 T_c}{12\pi\hbar c^2 (m\alpha)^{1/2} (T-T_c)^{1/2}} \tag{49,10}$$

(*H. Schmidt*, 1968; *A. Schmid*, 1969). Мы видим, что вблизи точки перехода восприимчивость возрастает как $(T-T_c)^{-1/2}$. В этой области (49,10) представляет собой основной вклад в магнитную восприимчивость нормального металла.

Задачи

1. Определить магнитный момент тонкой (толщина $d \ll \xi(T)$) пленки в перпендикулярном ее плоскости слабом магнитном поле при температурах $T > T_c$, $T-T_c \ll T_c$.

Решение. Конечность толщины пленки приводит к дискретности квантового числа p_z в (49,4), причем для тонкой пленки надо ограничиться в (49,7) лишь значением $p_z = 0$ (уже первое отличное от нуля значение $p_z \sim \hbar/d$, так что $E \sim \hbar^2/md^2 \gg \hbar^2/m\xi^2 \sim a$). Число собственных функций с заданными n и p_z (и всеми возможными p_x) есть $2|e|\mathfrak{H}S/2\pi\hbar c$, где S — площадь пленки; поэтому суммирование по q в (49,7) надо понимать как $(\mathfrak{H}S/\pi\hbar c)\sum\limits_n$. Применив к сумме формулу Пуассона, получим в результате

$$\Delta F = S \frac{e^2 T_c \mathfrak{H}^2}{24\pi m c^2 a}.$$

Магнитный момент пленки

$$M = -\frac{\partial \Delta F}{\partial \mathfrak{H}} = -S \frac{e^2 T_c \mathfrak{H}}{12\pi m c^2 \alpha (T-T_c)}.$$

Обратим внимание на то, что он возрастает при $T \to T_c$ быстрее, чем в случае неограниченного металла.

2. То же для шарика радиуса $R \ll \xi(T)$ (*В. В. Шмидт*, 1966).

Решение. В этом случае из всех собственных значений уравнения (49,3) существенно лишь одно, наименьшее, отвечающее собственной функции $\psi = \mathrm{const}$ и равное $E_0 = e^2R^2\mathfrak{H}^2/10mc^2$ (см. все сказанное по этому поводу в задаче к § 47). Сумма (49,7) сводится к одному члену, и магнитный момент

$$M \approx -\frac{T_c}{a}\frac{\partial E_0}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{e^2 T_c R^2 \mathfrak{H}}{5mc^2\alpha(T-T_c)}.$$

§ 50. Эффект Джозефсона

Рассмотрим два сверхпроводника, разделенных тонким слоем диэлектрика. Для электронов этот слой представляет собой потенциальный барьер, и если слой достаточно тонок, то существует конечная вероятность их проникновения через него путем квантового туннелирования. Даже если коэффициент про-