Окончательно, после взятия интеграла,

$$\Delta F = V \frac{e^2 T_c \mathfrak{H}^2}{24\pi\hbar c^2 \sqrt{m a}}. \qquad (49,9)$$

Отсюда магнитная восприимчивость

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial \mathfrak{H}^2} = -\frac{e^2 T_c}{12\pi\hbar c^2 (m\alpha)^{1/2} (T-T_c)^{1/2}} \qquad (49,10)$$

(*H. Schmidt*, 1968; *A. Schmid*, 1969). Мы видим, что вблизи точки перехода восприимчивость возрастает как $(T-T_c)^{-1/2}$. В этой области (49,10) представляет собой основной вклад в магнитную восприимчивость нормального металла.

Задачи

1. Определить магнитный момент тонкой (толщина $d \ll \xi(T)$) пленки в перпендикулярном ее плоскости слабом магнитном поле при температурах $T > T_c$, $T - T_c \ll T_c$.

Решение. Конечность толщины пленки приводит к дискретности квантового числа p_z в (49,4), причем для тонкой пленки надо ограничиться в (49,7) лишь значением $p_z = 0$ (уже первое отличное от нуля значение $p_z \sim \hbar/d$, так что $E \sim \hbar^2/md^2 \gg \hbar^2/m\xi^2 \sim a$). Число собственных функций с заданными n и p_z (и всеми возможными p_x) есть $2|e|\mathfrak{H}S/2\pi\hbar c$, где S — площадь пленки; поэтому суммирование по q в (49,7) надо понимать как $(\mathfrak{H}S/\pi\hbar c)\sum\limits_n$. Применив к сумме формулу Пуассона, получим в результате

$$\Delta F = S \frac{e^2 T_c \mathfrak{H}^2}{24\pi m c^2 a}.$$

Магнитный момент пленки

$$M = -\frac{\partial \Delta F}{\partial \mathfrak{H}} = -S \frac{e^2 T_c \mathfrak{H}}{12\pi m c^2 \alpha (T-T_c)}.$$

Обратим внимание на то, что он возрастает при $T \to T_c$ быстрее, чем в случае неограниченного металла.

2. То же для шарика радиуса $R \ll \xi(T)$ (*В. В. Шмидт*, 1966).

Решение. В этом случае из всех собственных значений уравнения (49,3) существенно лишь одно, наименьшее, отвечающее собственной функции $\psi = \mathrm{const}$ и равное $E_0 = e^2 R^2 \mathfrak{H}^2/10mc^2$ (см. все сказанное по этому поводу в задаче к § 47). Сумма (49,7) сводится к одному члену, и магнитный момент

$$M \approx -\frac{T_c}{a}\frac{\partial E_0}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{e^2 T_c R^2 \mathfrak{H}}{5mc^2 \alpha (T-T_c)}.$$

§ 50. Эффект Джозефсона

Рассмотрим два сверхпроводника, разделенных тонким слоем диэлектрика. Для электронов этот слой представляет собой потенциальный барьер, и если слой достаточно тонок, то существует конечная вероятность их проникновения через него путем квантового туннелирования. Даже если коэффициент пропускания барьера мал, его отличие от нуля имеет принципиальное значение: оба сверхпроводника становятся единой системой, описывающейся единой конденсатной волновой функцией. Это обстоятельство приводит к эффектам, впервые предсказанным *Джозефсоном* (*B. D. Josephson*, 1962).

Единство конденсатной волновой функции системы означает, что через контакт между двумя сверхпроводниками может течь, в отсутствие приложенной извне разности потенциалов, сверхпроводящий ток. Подобно тому как внутри сверхпроводников плотность тока определяется градиентом фазы Φ конденсатной волновой функции, так плотность j протекающего через контакт сверхпроводящего тока связана с разностью значений Φ_2 и Φ_1 фазы на обоих сторонах контакта[1]). Поскольку значения разности $\Phi_2-\Phi_1$, отличающиеся на целое кратное от 2π, физически тождественны, то ясно, что функция

$$j=j(\Phi_{21}),\quad \Phi_{21}=\Phi_2-\Phi_1 \tag{50,1}$$

должна быть периодической с периодом 2π. Операция обращения времени меняет знак тока j и в то же время меняет знак фазы Φ_{21} (поскольку волновые функции заменяются своими комплексно-сопряженными). Это значит, что функция (50,1) должна быть нечетной и обращаться в нуль при $\Phi_{21}=0$. Будучи, разумеется, ограниченной, функция $j(\Phi_{21})$ имеет свои максимальное и минимальное значения, между которыми она и меняется при изменении разности фаз, а в силу нечетности функции эти значения одинаковы по абсолютной величине; обозначим их через $\pm j_m$.

Следует отметить, что запись (50,1) предполагает пренебрежение влиянием на ток со стороны собственного магнитного поля токов внутри контакта. В противном случае вместо разности Φ_{21} должно было бы фигурировать калибровочно инвариантное выражение

$$\Phi_2-\Phi_1-\frac{2e}{\hbar c}\int_1^2 A_x\,dx.$$

Ввиду очень малой толщины диэлектрического слоя условие допустимости пренебрежения стоящим здесь интегралом от непрерывной функции $A_x(x)$ легко выполняется (а значения самого

---

[1]) Для того чтобы сверхпроводящий ток через контакт имел заметную величину, толщина диэлектрического слоя фактически должна быть очень мала: $\sim 10^{-7}$ см. Такие расстояния малы даже по сравнению с наименьшим характерным параметром длины в сверхпроводнике — длиной когерентности ξ_0. В этом смысле слой должен рассматриваться как бесконечно тонкий, а поведение фазы внутри него в теории вообще не фигурирует.

потенциала A_x на обеих сторонах контакта можно считать одинаковыми).

Определение вида функции $j(\Phi_{21})$ во всей области температур возможно лишь на основе микроскопической теории. Мы ограничимся здесь феноменологическим рассмотрением в рамках применимости теории Гинзбурга—Ландау.

Если бы контакт был совсем непроницаем для электронов, волновые функции ψ каждого из сверхпроводников удовлетворяли бы на своем краю контакта граничным условиям (45,15):

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{2ie}{\hbar c}A_x\psi_1=0,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{2ie}{\hbar c}A_x\psi_2=0.$$

Конечная проницаемость барьера и конечность значений ψ на границах контакта приводят к появлению в правых сторонах этих условий отличных от нуля выражений, зависящих от значений ψ по другую сторону контакта. Ввиду малости ψ (вблизи точки перехода T_c) можно ограничиться в этих функциях линейными по ψ членами, т. е. написать

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{2ie}{\hbar c}A_x\psi_1=\frac{\psi_2}{\lambda}, \qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{2ie}{\hbar c}A_x\psi_2=\frac{\psi_1}{\lambda}; \qquad (50,2)$$

коэффициент $1/\lambda$ пропорционален проницаемости барьера. Равенства (50,2) должны удовлетворять требованиям симметрии относительно обращения времени: они должны оставаться справедливыми при преобразовании $\psi\to\psi^*$, $\mathbf{A}\to-\mathbf{A}$; отсюда следует, что постоянная λ вещественна (тогда при указанном преобразовании равенства (50,2) просто совпадают со своими комплексно-сопряженными).

Связь между величиной сверхпроводящего тока через контакт и разностью фаз функции ψ можно определить, применив формулу (45,14) к какой-либо из сторон контакта (скажем, со стороны 1):

$$j=-\frac{ie\hbar}{2m}\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\psi_1\frac{\partial\psi_1^*}{\partial x}\right)-\frac{2e^2}{mc}A_x\psi_1^*\psi_1.$$

Подставив сюда $\partial\psi_1/\partial x$ из граничного условия (50,2), получим

$$j=-\frac{ie\hbar}{2m\lambda}(\psi_1^*\psi_2-\psi_1\psi_2^*).$$

Для контактов одинаковых металлов величины ψ_1 и ψ_2 отличаются только своей фазой; находим тогда для плотности тока:

$$j=j_m\sin\Phi_{21}, \qquad j_m=\frac{e\hbar}{m\lambda}|\Psi|^2. \qquad (50,3)$$

При приближении к точке перехода $|\psi|^2$ стремится к нулю как T_c-T; по такому же закону, следовательно, стремится к нулю и максимальная плотность тока через контакт[1]).

Пусть теперь к туннельному контакту приложена от внешнего источника некоторая разность потенциалов, т. е. в контакте имеется электрическое поле **E**. Будем описывать это поле скалярным потенциалом, обозначив его здесь через V: $\mathbf{E}=-\nabla V$. Влияние этого поля на сверхпроводящий ток через контакт можно выяснить уже на основании требований калибровочной инвариантности.

В отсутствие поля (при $V=0$) фаза волновой функции не зависит от времени: $\partial\Phi/\partial t=0$[2]). Для обобщения этого равенства на случай наличия электрического поля замечаем, что общее соотношение должно быть инвариантно по отношению к калибровочному преобразованию скалярного потенциала

$$V\to V-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}, \tag{50,4}$$

не затрагивающему векторный потенциал (который предполагается не зависящим от времени). Точно так, как это было сделано при выводе преобразования (44,3), (44,6), найдем, что одновременно с V должна быть преобразована фаза волновой функции согласно

$$\Phi\to\Phi+\frac{2e}{\hbar c}\chi(t). \tag{50,5}$$

Отсюда ясно, что калибровочно инвариантным будет соотношение

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{2e}{\hbar}V=0, \tag{50,6}$$

переходящее в $\partial\Phi/\partial t=0$ при $V=0$.

При не зависящем от времени электрическом поле интегрирование равенства (50,6) дает

$$\Phi=\Phi^{(0)}-\frac{2e}{\hbar}Vt,$$

---

[1]) Микроскопическая теория, основанная на модели БКШ, показывает, что такая же связь (50,3) между j и Φ_{21} имеет место при всех температурах. Эта же теория позволяет связать j_m с электрическим сопротивлением контакта между двумя металлами в нормальном состоянии. Изложение этой теории можно найти в книге: *И. О. Кулик, И. К. Янсон*, Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах, «Наука», 1970.

[2]) Напомним (ср. примечание на стр. 150), что временной множитель $\exp(-2i\mu t/\hbar)$ исключен из волновой функции тем, что гамильтониан системы $\hat{H}$ заменен на $\hat{H}'=\hat{H}-\mu\hat{N}$.

где $\Phi^{(0)}$ не зависит от времени. Поэтому, если к контакту приложена постоянная электрическая разность потенциалов V_{21}, то разность фаз на нем

$$\Phi_{21}=\Phi_{21}^{(0)}-\frac{2e}{\hbar}V_{21}t.$$

Подставив это выражение в (50,3), находим сверхпроводящий ток через контакт

$$j=j_m\sin\left(\Phi_{21}^{(0)}-\frac{2e}{\hbar}V_{21}t\right). \qquad (50,7)$$

Мы приходим к замечательному результату: наложение на туннельный контакт постоянной разности потенциалов приводит к появлению сверхпроводящего переменного тока с частотой

$$\omega_j=\frac{2}{\hbar}|eV_{21}|. \qquad (50,8)$$

Потребляемая в контакте мощность дается произведением jV_{21}; ее среднее (по времени) значение равно нулю, т. е. систематическая затрата энергии от внешнего источника отсутствует—как и должно быть для сверхпроводящего тока, не связанного с диссипацией энергии. Подчеркнем, однако, что при наличии внешней электродвижущей силы через контакт будет протекать также и некоторый нормальный ток (слабый при малом V_{21}), сопровождающийся диссипацией.

Заключение о периодическом с частотой (50,8) изменении сверхпроводящего тока через контакт следует уже из самого факта периодической зависимости j от Φ_{21} и линейной зависимости Φ_{21} от времени; это заключение не связано с какими-либо предположениями о величине разности потенциалов. Конкретная же формула (50,7) справедлива лишь при условии малости частоты ω_j по сравнению с характерной для сверхпроводимости частотой $\Delta/\hbar$:

$$\hbar\omega_j=2|eV|\ll\Delta(T). \qquad (50,9)$$

Задача

Написать уравнение для тока в цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и сверхпроводника с туннельным контактом; в цепи действует электродвижущая сила V_0.

Решение. Полное падение напряжения в цепи $V_0=RJ+V_{21}$, где J — текущий по цепи ток, а V_{21}—разность потенциалов на контакте[1]). Подставив сюда $J=J_m\sin\Phi_{21}$ и V_{21} из (50,6), получим

$$\frac{\hbar}{2|e|}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial t}=V_0-RJ_m\sin\Phi_{21}.$$

Отметим, что описываемый этим уравнением переменный ток имеет несинусоидальный характер.

[1]) Малым (при малом V_0) нормальным током в сверхпроводнике пренебрегаем.