§ 51. Связь тока с магнитным полем в сверхпроводнике

В § 44 были получены формулы, определяющие связь между током и магнитным полем в сверхпроводнике в предельном (лондоновском) случае медленного изменения всех величин вдоль объема тела; при этом поле предполагалось слабым—малым по сравнению с его критическим значением. Теперь мы рассмотрим этот вопрос в общем случае произвольно меняющегося в пространстве статического поля, по-прежнему предполагая его слабым. Слова «произвольно меняющееся» означают здесь, что поле может существенно меняться на расстояниях $\sim\xi_0$ (но, конечно, по-прежнему мало меняется на расстояниях порядка величины постоянной решетки; поэтому неоднородность среды—металла—на атомных расстояниях несущественна).

В общем случае связь между током и магнитным полем в пространственно-неограниченной среде изображается интегральной формулой вида

$$j_i(\mathbf{r}) = -\int Q_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, A_k(\mathbf{r}')\, d^3x', \tag{51,1}$$

где ядро Q_{ik} зависит только от свойств самой среды[1]). Линейность зависимости (51,1) отвечает предположению о слабости поля.

Как известно, плотность тока может рассматриваться как вариационная производная от энергии системы по векторному потенциалу: изменение функции Гамильтона системы при варьировании $\mathbf{A}$ есть

$$\delta H = -\frac{1}{c}\int \mathbf{j}\delta\mathbf{A}\, d^3x$$

(см. III (115,1)). Поэтому ядро Q_{ik} в (51,1) является второй вариационной производной, а симметрия относительно порядка двукратного дифференцирования (по $A_i(\mathbf{r})$ и $A_k(\mathbf{r}')$) означает, что

$$Q_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = Q_{ki}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}). \tag{51,2}$$

Разложив $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в интегралы Фурье, запишем связь (51,1) для фурье-компонент:

$$j_i(\mathbf{k}) = -Q_{ik}(\mathbf{k})\, A_k(\mathbf{k}), \tag{51,3}$$

причем в силу (51,2) $Q_{ik}(\mathbf{k}) = Q_{ki}(-\mathbf{k})$.

Некоторые важные свойства функции $Q_{ik}(\mathbf{k})$ следуют уже из требований калибровочной инвариантности. Ток $\mathbf{j}$ не должен

---

[1]) Задача о неограниченной среде имеет в данной связи лишь формальный смысл. Ее реальное значение состоит в дальнейшем применении ее результатов к задаче об ограниченной среде—см. следующий параграф.

меняться при калибровочном преобразовании $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \to \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})$ или, для фурье-компонент:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \to \mathbf{A}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k}\chi(\mathbf{k}).$$

Это значит, что тензор $Q_{ik}(\mathbf{k})$ должен быть ортогонален волновому вектору

$$Q_{ik}(\mathbf{k})\, k_k = 0. \tag{51.4}$$

В частности, в кристалле кубической симметрии тензорная зависимость Q_{ik} сводится к членам вида δ_{ik} и $k_i k_k$; из (51,4) следует тогда, что

$$Q_{ik} = \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right) Q(\mathbf{k}), \tag{51,5}$$

где $Q(\mathbf{k})$ — скалярная функция.

Для дальнейшего выберем калибровку потенциала, в которой $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. Для фурье-компонент это значит, что $\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$. Поэтому связь (51,3) между током и потенциалом сведется к равенству

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = -Q(\mathbf{k})\, \mathbf{A}(\mathbf{k}), \tag{51,6}$$

т. е. будет определяться лишь скалярной функцией $Q(\mathbf{k})$.

Лондоновскому случаю отвечает предельное выражение $Q(\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} \to 0$. Это выражение легко найти, применив к обоим сторонам уравнения (44,8)

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

оперицию rot и учтя равенство $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Заметив, что в силу уравнения непрерывности также и $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, получим

$$\Delta \mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \Delta \mathbf{A}.$$

В неограниченном пространстве для везде конечных функций $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ отсюда следует, что и

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2 n_s}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \tag{51,7}$$

т. е. значение тока в каждой точке определяется лишь значением потенциала в той же точке. Такое же равенство имеет место между фурье-компонентами $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, и сравнение с (51,6) показывает, что $Q(\mathbf{k})$ дается не зависящим от $\mathbf{k}$ выражением[1])

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{e^2 n_s}{mc} = \frac{c}{4\pi\delta_L^2} \quad \text{при} \quad \mathbf{k} \to 0. \tag{51,8}$$

---

[1]) В этом и следующих параграфах лондоновская глубина проникновения обозначается как δ_L.

Дальнейшее содержание этого параграфа состоит в вычислении $Q(\mathbf{k})$ для модели БКШ, под которой подразумевается, как уже говорилось, изотропный вырожденный ферми-газ со слабым притяжением между частицами (электронами). В то же время предполагается, что эти частицы взаимодействуют с магнитным полем своим зарядом e.

В § 42 были написаны уравнения (42,5) для температурных гриновских функций ферми-газа в отсутствие внешнего поля. Введение магнитного поля осуществляется заменой оператора $\nabla \to \nabla - ie\mathbf{A}/c$ в гамильтониане $\hat{H}^{(0)}$ (7,7)[1]. Такое же изменение возникает, следовательно, в уравнении (7,8) для $\hat{\Psi}$ и соответственно замена $\nabla \to \nabla + ie\mathbf{A}/c$ в аналогичном уравнении для $\hat{\Psi}^{+}$; то же самое относится, очевидно, и к уравнениям для $\hat{\Psi}^{M}$ и $\hat{\bar{\Psi}}^{M}$. Спиновый же член ($\sim\sigma\mathbf{H}$), отвечающий прямому взаимодействию магнитного момента электрона с полем, мал и им можно пренебречь в гамильтониане и уравнениях. При воздействии оператора ∇ на функции $\mathscr{G}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')$ и $\mathscr{F}(\tau, \mathbf{r}; \tau', \mathbf{r}')$ дифференцированию подвергаются соответственно операторы $\hat{\Psi}^{M}(\tau, \mathbf{r})$ и $\hat{\bar{\Psi}}^{M}(\tau, \mathbf{r})$. Поэтому и в уравнениях (42,5) введение магнитного поля осуществляется теми же заменами $\nabla \to \nabla \mp ie\mathbf{A}/c$.

Наличие внешнего поля нарушает пространственную однородность системы, в результате чего зависимость гриновских функций от аргументов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ уже не сводится к зависимости от $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$; от аргументов же τ и τ' функции по-прежнему зависят только через разность $\tau-\tau'$. Мы запишем уравнения сразу для фурье-компонент по $\tau-\tau'$:

$$\left\{i\zeta_s + \frac{1}{2m}\left[\nabla - \frac{ie}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]^2 + \mu\right\}\mathscr{G}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') + g\Xi\bar{\mathscr{F}}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}),$$
$$\left\{-i\zeta_s + \frac{1}{2m}\left[\nabla + \frac{ie}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]^2 + \mu\right\}\bar{\mathscr{F}}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') - g\Xi^*\mathscr{G}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \qquad (51,9)$$

В случае слабого поля, который мы только и будем здесь рассматривать, эти уравнения могут быть линеаризованы; полагаем

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}^{(0)} + \mathscr{G}^{(1)}, \quad \bar{\mathscr{F}} = \bar{\mathscr{F}}^{(0)} + \bar{\mathscr{F}}^{(1)} \qquad (51,10)$$

(где первые члены — значения функций в отсутствие поля, а вторые — малые поправки, линейные по полю) и сохраняем в уравнениях лишь члены первого порядка малости по $\mathbf{A}$.

---

[1]) Ниже в этом параграфе (в уравнениях (51,9—19)) полагаем $\hbar = 1$.

При этом надо иметь в виду, что наличие поля меняет также и конденсатную волновую функцию Ξ, не сводящуюся в этом случае к постоянной. Это усложнение, однако, отсутствует при выбранной нами калибровке векторного потенциала, в которой

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{51,11}$$

Действительно, поправка первого порядка (к постоянному значению $\Xi^{(0)}$) в скалярной функции $\Xi(\mathbf{r})$ могла бы быть лишь пропорциональной $\operatorname{div}\mathbf{A}$ и при условии (51,11) обращается в нуль. Поэтому с требуемой точностью можно положить в линеаризованных уравнениях $g\Xi=g\Xi^{(0)}\equiv\Delta$, где Δ — щель в энергетическом спектре газа в отсутствие поля (вещественная величина).

В результате линеаризованные уравнения (51,9) принимают вид

$$\begin{gathered}\left(i\zeta_s+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\mathcal{G}^{(1)}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\mathbf{r}')+\Delta\overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\mathbf{r}')=\\ =\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r})\nabla\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s;\ \mathbf{r}-\mathbf{r}'),\\ \left(-i\zeta_s+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\mathbf{r}')-\Delta\mathcal{G}^{(1)}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\mathbf{r}')=\\ =-\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r})\nabla\overline{\mathcal{F}}^{(0)}(\zeta_s;\ \mathbf{r}-\mathbf{r}').\end{gathered} \tag{51,12}$$

В виду линейности этих уравнений по $\mathbf{A}$ достаточно решить их для одной из фурье-компонент поля, т. е.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\mathbf{A}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}},\quad \mathbf{kA}(\mathbf{k})=0. \tag{51,13}$$

При таком $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ зависимость функций $\mathcal{G}^{(1)}$ и $\overline{\mathcal{F}}^{(1)}$ от суммы $\mathbf{r}+\mathbf{r}'$ можно сразу отделить, положив

$$\begin{gathered}\mathcal{G}^{(1)}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\mathbf{r}')=g(\zeta_s;\ \mathbf{r}-\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2},\\ \overline{\mathcal{F}}^{(1)}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\mathbf{r}')=f(\zeta_s;\ \mathbf{r}-\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2}.\end{gathered} \tag{51,14}$$

Так, первое из уравнений (51,12) принимает после этого вид

$$\left[i\zeta_s+\frac{1}{2m}\left(\nabla+\frac{i}{2}\mathbf{k}\right)^2+\mu\right]g(\zeta_s;\ \mathbf{r}-\mathbf{r}')+\Delta f(\zeta_s;\ \mathbf{r}-\mathbf{r}')=$$
$$=\frac{ie}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/2}\nabla\overline{\mathcal{F}}^{(0)}(\zeta_s;\ \mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

и аналогично для второго уравнения. Произведем теперь фурье-преобразование функций g и f по $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Окончательно приходим к следующей системе двух алгебраических уравнений:

$$\left[i\zeta_s-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2+\mu\right]g(\zeta_s,\mathbf{p})+\Delta f(\zeta_s,\mathbf{p})=$$
$$=-\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\mathbf{k})\mathcal{G}^{(0)}\left(\zeta_s,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right),\tag{51,15}$$
$$\left[-i\zeta_s-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2+\mu\right]f(\zeta_s,\mathbf{p})-\Delta g(\zeta_s,\mathbf{p})=$$
$$=\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\mathbf{k})\overline{\mathcal{F}}^{(0)}\left(\zeta_s,\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}\right).$$

После простых преобразований с использованием выражений (42,7—8) для функций $\mathcal{G}^{(0)}$ и $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ решение этих уравнений приводится к виду

$$g(\zeta_s,\mathbf{p})=-\frac{e}{mc}\mathbf{pA}(\mathbf{k})\frac{(i\zeta_s+\eta_+)(i\zeta_s+\eta_-)+\Delta^2}{(\zeta_s^2+\varepsilon_+^2)(\zeta_s^2+\varepsilon_-^2)},\tag{51,16}$$

где $\varepsilon_\pm=\varepsilon(\mathbf{p}\pm\mathbf{k}/2)$, $\eta_\pm=\eta(\mathbf{p}\pm\mathbf{k}/2)$ (функция же $f(\zeta_s,\mathbf{p})$ нам ниже не понадобится).

Перейдем к вычислению тока. Для этого исходим из известного выражения оператора плотности тока в представлении вторичного квантования [1])

$$\hat{\mathbf{j}}=\frac{ie}{2m}\left[(\nabla\hat{\Psi}_\alpha^+)\hat{\Psi}_\alpha-\hat{\Psi}_\alpha^+(\nabla\hat{\Psi}_\alpha)\right]-\frac{e^2}{mc}\mathbf{A}\hat{\Psi}_\alpha^+\hat{\Psi}_\alpha.$$

Для перехода к мацубаровскому представлению этого оператора достаточно заменить гейзенберговские $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^+$ на мацубаровские $\hat{\Psi}^M$, $\hat{\overline{\Psi}}{}^M$. Вспомнив определение гриновской функции (37,2), найдем, что плотность тока (диагональный матричный элемент оператора $\hat{\mathbf{j}}$, усредненный по распределению Гиббса) может быть записана в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})=2\frac{ie}{2m}\left[(\nabla'-\nabla)\mathcal{G}(\tau,\mathbf{r};\tau',\mathbf{r}')\right]_{\substack{\mathbf{r}'=\mathbf{r}\\ \tau'=\tau+0}}-\frac{e^2}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r})n,\tag{51,17}$$

где n — плотность числа частиц (множитель 2 возникает от $\mathcal{G}_{\alpha\alpha}=2\mathcal{G}$).

При подстановке в (51,17) $\mathcal{G}=\mathcal{G}^{(0)}+\mathcal{G}^{(1)}$ член с $\mathcal{G}^{(0)}$ выпадает: для однородной и изотропной системы функция $\mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ четна, и ее производная при $\mathbf{r}-\mathbf{r}'=0$ обращается в нуль. Перейдя

[1]) См. III § 115. Здесь опущен член, представляющий вклад в ток от спина частиц. Для неферромагнитной системы (когда гриновская функция $\mathcal{G}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\mathcal{G}$) этот член при усреднении обращается в нуль.

также к разложению Фурье по $\tau-\tau'$, получим

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})=\frac{ie}{m}T\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left[(\nabla'-\nabla)\mathcal{G}^{(1)}(\zeta_s;\ \mathbf{r},\mathbf{r}')\right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}}-\frac{e^2n}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

а после подстановки $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{G}^{(1)}$ из (51,13) и (51,14) —

$$\mathbf{j}(\mathbf{k})=\frac{2eT}{m}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int\mathbf{p}g(\zeta_s,\mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3}-\frac{ne^2}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{k}).$$

При подстановке сюда $g(\zeta_s,\mathbf{p})$ из (51,16) удобно сразу учесть поперечность векторов $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ и произвести усреднение по направлениям $\mathbf{p}_\perp$ в плоскости, перпендикулярной направлению $\mathbf{k}$, по формуле

$$\overline{p_{\perp i}p_{\perp k}}=\frac{p^2}{2}\sin^2\theta\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{k^2}\right),$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$. В результате находим следующее выражение для функции $Q(\mathbf{k})$, определяющей связь между $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{k})$:

$$Q(\mathbf{k})=\frac{e^2T}{m^2c}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int p^2\sin^2\theta\frac{(i\zeta_s+\eta_+)(i\zeta_s+\eta_-)+\Delta^2}{(\zeta_s^2+\varepsilon_+^2)(\zeta_s^2+\varepsilon_-^2)}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}+\frac{ne^2}{mc},$$

$$\varepsilon_\pm^2=\eta_\pm^2+\Delta^2,\quad \eta_\pm=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}\pm\frac{\mathbf{k}}{2}\right)^2-\mu. \tag{51,18}$$

Написанные в таком виде стоящие здесь интегралы и сумма формально расходятся. Хотя эти расходимости в действительности фиктивны, но при вычислении требуется осторожность: до устранения расходимости результат может зависеть даже от порядка, в котором производятся интегрирование и суммирование.

Эту трудность можно обойти, если учесть заранее очевидное обстоятельство, что при $\Delta=0$ должно быть $Q=0$ — в нормальном металле сверхпроводящий ток вообще отсутствует. Поэтому мы не изменим ответа, если вычтем из (51,18) такое же выражение с $\Delta=0$:

$$Q(\mathbf{k})=\frac{e^2T}{m^2c}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int p^2\sin^2\theta\left\{\frac{(i\zeta_s+\eta_+)(i\zeta_s+\eta_-)+\Delta^2}{(\zeta_s^2+\varepsilon_+^2)(\zeta_s^2+\varepsilon_-^2)}-\frac{1}{(i\zeta_s-\eta_+)(i\zeta_s-\eta_-)}\right\}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{51,19}$$

Это выражение уже хорошо сходится и интегрирование и суммирование в нем можно производить в любом порядке.

Отметим прежде всего, что интересующие нас значения $\mathbf{k}$ малы в том смысле, что $k \ll p_F$; это неравенство выражает собой просто тот факт, что характерные расстояния, на которых в сверхпроводнике меняются поле и ток, велики по сравнению с межчастичными расстояниями (т. е. по сравнению с $\sim 1/p_F$).

Произведем в (51,19) сначала интегрирование по dp. Этот интеграл сосредоточен в основном в узкой области импульсов вблизи ферми-поверхности — в области $|p-p_F| \sim k$. В этой области

$$\eta_\pm \approx \eta \pm \frac{1}{2} v_F k \cos\theta \approx v_F (p-p_F) \pm \frac{1}{2} v_F k \cos\theta,$$

множитель p^2 в подынтегральном выражении можно заменить на p_F^2, а интегрирование по d^3p — интегрированием по $2\pi m p_F d\eta\, d\cos\theta$. После этого интеграл по $d\eta$ от второго члена в фигурных скобках в (51,19) обращается в нуль: путь интегрирования в нем может быть теперь замкнут бесконечно удаленной полуокружностью в плоскости комплексного η, и обращение интеграла в нуль есть следствие того, что оба полюса подынтегрального выражения находятся в одной и той же полуплоскости (верхней или нижней в зависимости от знака ζ_s). Интегрирование по $d\eta$ в первом члене в (51,19) производится элементарно, после чего остается лишь интеграл по переменной $x = \cos\theta$. Введя также плотность n согласно равенству $p_F^3 = 3\pi^2 n$, получим окончательный результат в виде (в обычных единицах)

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{3\pi T n e^2}{4mc} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{\Delta^2 (1-x^2)\, dx}{[\zeta_s^2 + \Delta^2 + (\hbar v_F k x/2)^2]\,(\zeta_s^2+\Delta^2)^{1/2}}, \qquad \zeta_s = (2s+1)\pi T \tag{51,20}$$

(*J. Bardeen*, *L. N. Cooper*, *J. R. Schrieffer*, 1957)[1]).

В предельном случае малых значений k ($k\xi_0 \ll 1$, где $\xi_0 \sim \hbar v_F/\Delta_0 \sim \hbar v_F/T_c$ — длина когерентности) можно показать, что выражение (51,20) сводится к не зависящему от k лондоновскому выражению (51,8); мы не будем останавливаться здесь на этом.

В обратном предельном случае, когда $k\xi_0 \gg 1$, в интеграле (51,20) существенна область $x \lesssim T_c/\hbar k v_F \ll 1$. Поэтому можно пренебречь x^2 по сравнению с 1 в числителе подынтегрального выражения, после чего (ввиду быстрой сходимости) распространить интегрирование от $-\infty$ до ∞. В результате найдем

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{3\pi^2 n e^2 T}{2mc\hbar v_F k} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{\zeta_s^2+\Delta^2}.$$

[1]) Изложенный метод получения этого результата с помощью температурных гриновских функций принадлежит *А. А. Абрикосову* и *Л. П. Горькову* (1958).

Произведя суммирование с помощью (42,10), представим эту формулу в виде[1])

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{c\beta}{4\pi k}, \quad \beta = \frac{4\pi n e^2}{mc^2} \frac{3\pi^2}{4\hbar v_F} \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}, \quad k\xi_0 \gg 1. \qquad (51,21)$$

При $T \ll T_c$ имеем $n_s \approx n$, $\Delta \approx \Delta_0$, и тогда $\beta \sim 1/\delta_L^2 \xi_0$. При $T_c - T \ll T_c$ щель Δ мала, так что $\operatorname{th}(\Delta/2T) \approx \Delta/2T_c$; с учетом формул (40,4—5), (40,16) находим снова $\beta \sim 1/\delta_L^2 \xi_0$. Таким образом, во всей области температур от 0 до T_c

$$\beta \sim 1/\delta_L^2 \xi_0. \qquad (51,22)$$

Итак, функция $Q(\mathbf{k})$ остается примерно постоянной в области $k \lesssim 1/\xi_0$ (причем вблизи точки $\mathbf{k} = 0$ разлагается регулярно по степеням k^2); вне этой области функция $Q(\mathbf{k})$ убывает, при $k \gg 1/\xi_0$ — по закону $1/k$. Такому поведению функции $Q(\mathbf{k})$ отвечает координатная функция $Q(\mathbf{r})$, убывающая медленно (как $1/r^2$) в области $r \lesssim \xi_0$ и быстро (по экспоненциальному закону) вне этой области. Таким образом, корреляция между полем и током простирается всегда на расстояния $\sim \xi_0$. Подчеркнем, что это утверждение справедливо во всей области температур от нуля до T_c. Тем самым мы пришли к обоснованию сделанного уже в § 44 утверждения об универсальности ξ_0 как характерного для сверхпроводимости параметра длины.

§ 52. Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник

Применим полученные в предыдущем параграфе результаты к задаче о проникновении внешнего магнитного поля в сверхпроводник (в лондоновском приближении эта задача была рассмотрена в § 44).

Пусть сверхпроводник ограничен плоской поверхностью и занимает полупространство $x > 0$, а внешнее поле $\mathfrak{H}$ (а с ним и индукция $\mathbf{B}$ внутри сверхпроводника) направлено параллельно поверхности, вдоль оси z. Тогда все величины зависят только от координаты x, причем ток $\mathbf{j}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ (в калибровке с $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$) направлены вдоль оси y. Уравнение Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{A} = 4\pi \mathbf{j}/c$ сводится к

$$A''(x) = -\frac{4\pi}{c} j(x), \quad x > 0, \qquad (52,1)$$

где $'$ означает дифференцирование по x.

[1]) Формула такого вида была предложена Пиппардом (*A. B. Pippard*, 1953) на основании качественных соображений еще до создания микроскопической теории сверхпроводимости.