Произведя суммирование с помощью (42,10), представим эту формулу в виде[1])

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{c\beta}{4\pi k}, \quad \beta = \frac{4\pi n e^2}{mc^2}\frac{3\pi^2}{4\hbar v_F}\Delta\,\mathrm{th}\frac{\Delta}{2T}, \quad k\xi_0 \gg 1. \qquad (51,21)$$

При $T \ll T_c$ имеем $n_s \approx n$, $\Delta \approx \Delta_0$, и тогда $\beta \sim 1/\delta_L^2\xi_0$. При $T_c - T \ll T_c$ щель Δ мала, так что $\mathrm{th}(\Delta/2T) \approx \Delta/2T_c$; с учетом формул (40,4—5), (40,16) находим снова $\beta \sim 1/\delta_L^2\xi_0$. Таким образом, во всей области температур от 0 до T_c

$$\beta \sim 1/\delta_L^2\xi_0. \qquad (51,22)$$

Итак, функция $Q(\mathbf{k})$ остается примерно постоянной в области $k \lesssim 1/\xi_0$ (причем вблизи точки $\mathbf{k}=0$ разлагается регулярно по степеням k^2); вне этой области функция $Q(\mathbf{k})$ убывает, при $k \gg 1/\xi_0$ — по закону $1/k$. Такому поведению функции $Q(\mathbf{k})$ отвечает координатная функция $Q(\mathbf{r})$, убывающая медленно (как $1/r^2$) в области $r \lesssim \xi_0$ и быстро (по экспоненциальному закону) вне этой области. Таким образом, корреляция между полем и током простирается всегда на расстояния $\sim \xi_0$. Подчеркнем, что это утверждение справедливо во всей области температур от нуля до T_c. Тем самым мы пришли к обоснованию сделанного уже в § 44 утверждения об универсальности ξ_0 как характерного для сверхпроводимости параметра длины.

§ 52. Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник

Применим полученные в предыдущем параграфе результаты к задаче о проникновении внешнего магнитного поля в сверхпроводник (в лондоновском приближении эта задача была рассмотрена в § 44).

Пусть сверхпроводник ограничен плоской поверхностью и занимает полупространство $x > 0$, а внешнее поле $\mathfrak{H}$ (а с ним и индукция $\mathbf{B}$ внутри сверхпроводника) направлено параллельно поверхности, вдоль оси z. Тогда все величины зависят только от координаты x, причем ток $\mathbf{j}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ (в калибровке с $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$) направлены вдоль оси y. Уравнение Максвелла $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = -\Delta\mathbf{A} = 4\pi\mathbf{j}/c$ сводится к

$$A''(x) = -\frac{4\pi}{c}j(x), \quad x > 0, \qquad (52,1)$$

где $'$ означает дифференцирование по x.

---

[1]) Формула такого вида была предложена Пиппардом (*A. B. Pippard*, 1953) на основании качественных соображений еще до создания микроскопической теории сверхпроводимости.

Граничные условия к этому уравнению зависят, однако, от физических свойств поверхности металла по отношению к падающим на нее электронам. Наиболее прост случай зеркального отражения электронов от поверхности. Очевидно, что при таком законе отражения задача о полупространстве эквивалентна задаче о неограниченной среде, в которой поле $A(x)$ распределено симметрично по обе стороны плоскости $x=0$ $(A(x)=A(-x))$. При этом производная $A'(x)$, как нечетная функция x, будет испытывать при $x=0$ разрыв, меняя знак при прохождении x через нуль. Другими словами, условию $B=A'=\mathfrak{H}$ на поверхности полупространства в задаче с неограниченной средой отвечает условие

$$A'(+0)-A'(-0)=2\mathfrak{H}. \qquad (52,2)$$

Умножим уравнение (52,1) на e^{-ikx} и проинтегрируем его по dx в пределах от $-\infty$ до ∞. В левой стороне уравнения пишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} A''e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{0} (A'e^{-ikx})'\,dx + \int_{0}^{\infty} (A'e^{-ikx})'\,dx + ik\int_{-\infty}^{\infty} A'e^{-ikx}\,dx.$$

Первые два интеграла дают в сумме $-2\mathfrak{H}$, а в последнем можно интегрировать уже просто по частям, поскольку сама функция $A(x)$ непрерывна при $x=0$. В результате мы приходим к равенству

$$2\mathfrak{H}+k^2A(k)=\frac{4\pi}{c}\,j(k),$$

где $A(k)$ и $j(k)$ — фурье-компоненты функций $A(x)$ и $j(x)$, определенных во всем пространстве. Они связаны, следовательно, соотношением $j(k)=-Q(k)A(k)$, где $Q(k)$ дается формулами, полученными в предыдущем параграфе. Таким образом, для фурье-компонент поля находим

$$A(k)=-\frac{2\mathfrak{H}}{k^2+4\pi Q(k)/c}. \qquad (52,3)$$

Глубина проникновения δ определяется как[1])

$$\delta=\frac{1}{\mathfrak{H}}\int_0^{\infty} B(x)\,dx=-\frac{A(x=0)}{\mathfrak{H}}. \qquad (52,4)$$

Выразив $A(x=0)$ через фурье-компоненты $A(k)$ и подставив последние из (52,3), имеем

$$\delta=-\frac{1}{\mathfrak{H}}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\frac{dk}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k^2+4\pi Q(|k|)/c}. \qquad (52,5)$$

---

[1]) При экспоненциальном законе затухания поля это определение совпадает с определением в (44,13).

Основную роль в этом интеграле играет область значений k, в которой $k^2 \sim 4\pi Q/c$. В лондоновском случае (когда $\delta_L \gg \xi_0$) эти значения малы в том смысле, что $k\xi_0 \ll 1$. При этом $Q(k)$ дается не зависящим от k выражением (51,8), и интегрирование в (52,5) приводит, естественно, к значению $\delta = \delta_L$.

В обратном, пиппардовском случае (когда $\delta_L \ll \xi_0$) существенные в интеграле значения $k \gg 1/\xi_0$. Здесь $Q(k)$ дается выражением (51,21), и интеграл (52,5) дает

$$\delta = \delta_p = 4/3^{3/2}\beta^{1/3}. \tag{52,6}$$

С учетом (51,22) находим, таким образом, что пиппардовская глубина проникновения

$$\delta_p \sim (\delta_L^2\xi_0)^{1/3}. \tag{52,7}$$

Изложенные вычисления относились к случаю зеркального отражения электронов от поверхности металла. В лондоновском случае, однако, глубина проникновения вообще не зависит от закона отражения, как это ясно из вывода значения δ_L в § 44; при $\delta \gg \xi_0$ детали структуры поверхности не существенны.

Но и в пиппардовском случае зависимость глубины проникновения от закона отражения фактически оказывается весьма незначительной. Так, в обратном, по отношению к зеркальному, случае диффузного отражения (когда направления скоростей отраженных электронов распределены изотропно при любом направлении падения) значение δ_p оказывается всего в 9/8 раз больше, чем при зеркальном отражении.

§ 53. Сверхпроводящие сплавы

Наличие примесей оказывает на свойства сверхпроводников значительно более глубокое влияние, чем на свойства нормальных металлов. Поправки к термодинамическим величинам нормального металла остаются малыми до тех пор, пока мала концентрация x атомов примеси, и становятся значительными лишь при $x \sim 1$, т. е. когда среднее расстояние между атомами примеси становится сравнимым с постоянной решетки a. Подчеркнем, что мы говорим здесь, конечно, об электронных вкладах в термодинамические величины, причем о тех из них, которые определяются средней плотностью распределения квантовых состояний электронов проводимости в импульсном пространстве (таковы, например, теплоемкость и магнитная восприимчивость в слабых полях).

Иная картина в сверхпроводящих металлах. Это связано с существованием характерного параметра длины, большого по сравнению с a,— длины когерентности ξ_0. Поскольку рассеяние электронов на атомах примеси нарушает корреляцию между