

неравенство  $\delta(T) \gg l$  эквивалентно в этом случае более слабому условию

$$\frac{T_c - T}{T_c} \ll \chi_{\text{чист}}^2 \left( \frac{\xi_0}{l} \right)^3 \sim \chi^2 \frac{\xi_0}{l}.$$

Наконец, скажем несколько слов о свойствах сверхпроводников с парамагнитными примесями. Такие примеси нарушают симметрию системы относительно обращения времени и тем самым нарушают самое явление спаривания электронов (при наличии магнитных моментов обращение времени требует также и изменения знаков моментов, т. е. по существу означает замену одной физической системы другой). Количественной мерой влияния этих примесей на свойства сверхпроводника является длина пробега  $l_s$  по отношению к рассеянию с изменением направления спина (вызванного обменным взаимодействием с атомами примеси). Сверхпроводимость исчезает при достижении концентрации  $x$  критического значения, при котором  $l_s \sim \xi_0$ .

В действительности, однако, имеется две критические концентрации, обе одного порядка величины. При меньшей из них ( $x_1$ ) обращается в нуль щель  $\Delta$  в энергетическом спектре; конденсатная же волновая функция  $E$  обращается в нуль лишь при некоторой концентрации  $x_2 > x_1$ . В области же концентраций между  $x_1$  и  $x_2$  имеет место *бесщелевая* сверхпроводимость. Поскольку при выводе уравнения Лондонов в § 44 использовались лишь самый факт существования конденсатной функции и соображения калибровочной инвариантности, то ясно, что основные свойства сверхпроводника — существование сверхпроводящего тока, эффект Мейсснера — сохраняются и в этой области. Отсутствие же щели в спектре проявляется (в равновесных свойствах сверхпроводника) в неэкспоненциальном температурном ходе теплоемкости. Отметим, что противоречия с критерием сверхтекучести Ландау (§ 23) здесь не возникает, так как к неупорядоченным системам (типа рассматриваемых сплавов) этот критерий вообще неприменим, поскольку элементарные возбуждения не характеризуются определенным импульсом<sup>1)</sup>.

#### § 54. Эффект Купера при отличных от нуля орбитальных моментах пары

Уже неоднократно говорилось о том, что в основе возникновения сверхтекучести в ферми-системе лежит эффект Купера — образование связанных состояний (спаривание) притягивающимися частицами на ферми-поверхности. Для ферми-газа условие

<sup>1)</sup> Изложение теории бесщелевой сверхпроводимости см. в оригинальной статье: А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ 39, 1781 (1960).

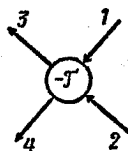
притяжения формулируется как требование отрицательности длины рассеяния  $a = \int U d^3x$ , т. е. положительность амплитуды рассеяния двух частиц в состоянии с нулевым орбитальным моментом относительного движения,  $l=0$  (именно это состояние дает главный вклад в рассеяние при малых энергиях).

Справедливо, однако, и гораздо более сильное утверждение: спаривание (и, как следствие, возникновение сверхтекучести) происходит, если взаимодействие имеет характер притяжения хотя бы при одном каком-либо значении момента  $l$  (Л. Д. Ландау, 1959). Подчеркнем, что речь идет об изотропной системе (жидкость или газ), где можно классифицировать состояния по значениям  $l$ .

Докажем это утверждение для ферми-газа с помощью метода, позволяющего, в принципе, определить температуру  $T_c$  перехода в сверхтекучее состояние исходя только из свойств системы (нормального ферми-газа) при температурах  $T > T_c$ .

В § 18 было упомянуто, что в математическом аппарате гриновских функций нормальной ферми-системы энергия связанного состояния пары частиц проявляется как полюс вершинной функции  $\Gamma$ ; то же самое относится (при  $T \neq 0$ ) и к температурной вершинной функции, которую обозначим через  $\mathcal{F}$ . После появления такого полюса весь этот аппарат становится в действительности неприменимым, но он еще применим в первый момент, когда, при понижении температуры, при  $T = T_c$  впервые появляется полюс, причем энергия связи пары в этот момент должна равняться нулю; состояния сверхтекучей и нормальной фаз при этом совпадают.

На скелетной диаграмме



кружок изображает  $-\mathcal{F}$ . Точка перехода  $T_c$  определяется, согласно сказанному выше, как температура, при которой  $\mathcal{F}$  имеет полюс при

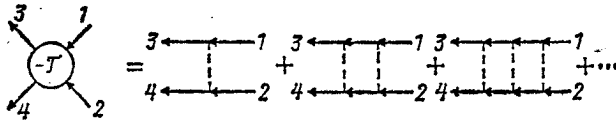
$$\zeta_{s1} = \zeta_{s2} = 0, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0. \quad (54,1)$$

Первое равенство выражает, что спаривающиеся частицы находятся на ферми-поверхности, а энергия связи пары равна нулю; второе равенство означает, что спаривающиеся частицы имеют противоположные импульсы.

Спаривание частиц возникает уже при сколь угодно слабом их притяжении. Ясно, что для возникновения полюса необхо-

димо, чтобы в ряде теории возмущений для вершинной функции имелись бы члены, содержащие интегралы, расходящиеся при условии (54,1) и при  $T_c \rightarrow 0$  ( $T_c$  мало при слабом притяжении); в противном случае все поправки к (конечному) члену первого приближения были бы заведомо малы по сравнению с последним при всех температурах, и полюс не мог бы появиться.

Этому требованию удовлетворяет ряд «лестничных» диаграмм



Как будет видно из последующего, во всех этих диаграммах (начиная со второй) малость по взаимодействию (от прибавления пунктирных линий) компенсируется, в указанном смысле, расходимостью интегралов<sup>1)</sup>.

Применив к этому ряду прием, который был уже использован при переходе от (17,3) к (17,4), найдем, что равенство (54,2) эквивалентно диаграммному уравнению

The diagrammatic equation (54,3) shows a vertex function with external momenta  $p_3, p_1, -p_3, -p_1$  on the left. This is equal to a diagrammatic equation: a loop diagram with a dashed line and a ladder diagram with external momenta  $p_3, p_1, -p_3, -p_1$  on the right. The equation is labeled (54,3).

Свободным концам и внутренним линиям диаграмм отвечают аргументы, которые указаны в (54,3) уже с учетом условий (54,1):

$$P_1 = (0, \mathbf{p}_1), \quad P_3 = (0, \mathbf{p}_3), \quad Q = (i\xi_s, \mathbf{q}).$$

Спиновая зависимость гриновских функций идеального газа отделяется в виде  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)} = \delta_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{(0)}$ , а спиновая зависимость вершинной функции (без антисимметризации!) — в виде

$$\mathcal{F}_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2) = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \mathcal{F}(P_3, P_4; P_1, P_2).$$

Раскрыв диаграммы (54,3) по указанным в § 38 правилам и сократив спиновые множители, получим для функции  $\mathcal{F}$  интегральное уравнение

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_3; \mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1) + T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int U(\mathbf{p}_3 - \mathbf{q}) \mathcal{G}^{(0)}(\xi_s, \mathbf{q}) \mathcal{G}^{(0)}(-\xi_s, -\mathbf{q}) \times \\ \times \mathcal{F}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}; \mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = U(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3). \quad (54,4)$$

<sup>1)</sup> К диаграммам (54,2) надо было бы добавить еще такой же ряд диаграмм с переставленными концами 3 и 4, что приводит к антисимметризации вершинной функции по ее спиновым и орбитальным аргументам. Однако для поставленной здесь цели определения  $T_c$  этого можно не делать, так как в обеих этих частях вершинной функции полюс появляется одновременно.

В стоящих здесь сумме и интегралах существенны малые значения дискретной переменной  $\zeta_s$  и значения  $\mathbf{q}$  вблизи ферми-поверхности (см. ниже). Поэтому в множителях  $U$  и  $\mathcal{F}$  под знаком интеграла можно положить  $\zeta_s = 0$  и  $q = p_F$ . На ферми-поверхности лежат также и векторы  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_3$ . Таким образом, все функции  $\mathcal{F}$  и  $U$  в уравнении (54,4) будут зависеть каждая лишь от одной независимой переменной — угла между какими-либо двумя из трех векторов  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_3$ ,  $\mathbf{q}$  на ферми-поверхности.

Уравнение (54,4) можно теперь решить, разложив  $U$  и  $\mathcal{F}$  в ряды по полиномам Лежандра:

$$U(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \vartheta),$$

$$\mathcal{F}(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathcal{F}_l P_l(\cos \vartheta),$$
(54,5)

где  $\vartheta$  — какой-либо из указанных углов. Подставив эти разложения в (54,4) и произведя интегрирование по направлениям с помощью теоремы сложения сферических функций, получим

$$\mathcal{F}_l (1 + a_l \Pi) = a_l, \quad (54,6)$$

где

$$\Pi = T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int |\mathcal{G}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{q})|^2 \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 q}{\zeta_s^2 + \eta_q^2}; \quad (54,7)$$

функция  $\mathcal{G}^{(0)}$  взята из (37,13), а  $\eta_q = q^2/2m - \mu \approx v_F(q - p_F)$ . Согласно формуле суммирования (42,10), имеем

$$\Pi = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \text{th} \frac{\eta_q}{2T} \frac{d^3 q}{\eta_q}. \quad (54,8)$$

Расходимость интеграла по  $dq = d\eta/v_F$  на верхнем пределе фиктивна (ср. примечание на стр. 189) и интеграл должен быть обрезан при некотором  $\eta \approx \tilde{\varepsilon}_l^{-1}$ . Но при  $T \rightarrow 0$  интеграл расходится логарифмически также и на нижнем пределе, т. е. ведет себя как  $\ln(1/T)$ .

Из (54,6) видно, что  $\mathcal{F}_l$  обращается в бесконечность (т. е.  $\mathcal{F}$  имеет полюс) при условии

$$1 + a_l \Pi = 0. \quad (54,9)$$

---

<sup>1)</sup> В виду быстрой сходимости суммы по  $s$  в (54,7) в ней действительно существенны лишь малые  $\zeta_s$ , а логарифмический характер интеграла по  $dq$  оправдывает предположение о близости  $q$  к  $p_F$ .

Но это уравнение совпадает по форме с уравнением, определяющим точку перехода при спаривании с  $l=0$ , отличаясь от него лишь заменой «константы связи»  $g$  на  $-a_l$  (ср. (42,11)); понимая эту формулу как уравнение для определения  $T_c$ , надо положить в ней  $\Delta=0$ , после чего  $\varepsilon(p)$  совпадает с  $\eta_p$ . Мы видим, следовательно, что вершинная функция имеет полюс, если хотя бы одна из величин  $a_l$  отрицательна; при этом температура перехода

$$T_c^{(l)} = \frac{\gamma}{\pi} \tilde{\varepsilon}_l \exp\left(-\frac{2}{|a_l| v_F}\right) \quad (54,10)$$

(ср. (40,4) и (39,19)). Если  $a_l < 0$  при ряде различных значений  $l$ , то переход происходит при температуре  $T_c^{(l)}$ , отвечающей максимальному  $|a_l|^{-1}$ .

Можно показать, что во всяком ферми-газе (или жидкости), состоящем из электрически нейтральных атомов, величины  $a_l$  во всяком случае должны стать отрицательными при достаточно больших значениях  $l$  (Л. П. Питаевский, 1959). Причина заключается в том, что во взаимодействии нейтральных атомов всегда есть область расстояний (больших), на которых оно имеет характер притяжения — так называемое ван-дер-ваальсово притяжение.

В реально существующей жидкости такого рода — жидком изотопе  $\text{He}^3$  — возникновение сверхтекучести происходит, по-видимому, за счет спаривания с  $l=1$ <sup>2)</sup>. Мы не будем останавливаться на структуре сверхтекучей фазы и обсудим лишь кратко вопрос о выборе параметра порядка, отличающего эту фазу от нормальной. Величиной, равной нулю выше точки перехода и отличной от нуля ниже нее, является аномальная гриновская функция  $F_{\alpha\beta}(t, \mathbf{r}_1; t, \mathbf{r}_2) \equiv F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ; как было уже указано в § 41, она играет роль волновой функции связанных пар частиц. Ее фурье-компонента  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ , взятая на ферми-поверхности (т. е. при  $\mathbf{p} = 2p_F \mathbf{n}$ ), является функцией направления  $\mathbf{n}$  (а не константой, как при спаривании с  $l=0$ ). В силу антикоммутации  $\psi$ -операторов функция  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{n})$  антисимметрична, как и следовало, по отношению к перестановке частиц:  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = -F_{\beta\alpha}(-\mathbf{n})$ .

<sup>1)</sup> Отметим, что если бы были все  $a_l > 0$ , то переход отсутствовал бы и формула (54,6) для  $\mathcal{F}_l$  была бы справедлива при всех температурах вплоть до  $T=0$ . При этом все  $\mathcal{F}_l$  стремились бы при  $T \rightarrow 0$  к нулю по закону  $\mathcal{F}_l \sim 1/|\ln T|$ . Это является проявлением упомянутого в примечании на стр. 41 факта обращения при  $T=0$  в нуль функции  $\mathcal{F}$  (а с нею и функции взаимодействия квазичастиц  $f$ ) для частиц с противоположными импульсами.

<sup>2)</sup> Переход происходит при температуре  $\sim 10^{-3}$  К. Заметим, что малость  $T_c$  обеспечивает существование области применимости теории нормальной ферми-жидкости к жидкому  $\text{He}^3$ .

При спаривании с  $l=1$  (как и с любым нечетным моментом)  $F_{\alpha\beta}$  — нечетная функция  $\mathbf{n}$ , так что  $F_{\alpha\beta}$  — симметричный спинор. Это значит, что спин пары равен единице, как и должно быть для состояния двух одинаковых фермионов с нечетным  $l$ . Симметричный спинор второго ранга эквивалентен вектору, который обозначим через  $\mathbf{d}$ . В случае  $l=1$  зависимость  $\mathbf{d}$  от  $\mathbf{n}$  должна отвечать полиному Лежандра  $P_1(\cos\theta)$ , т. е. быть линейной:  $d_i = \psi_{ik} n_k$ . Комплексный тензор второго ранга  $\psi_{ik}$  (не обязательно симметричный!) и описывает сверхтекучую фазу. Реально существуют две различные сверхтекучие фазы жидкого  $\text{He}^3$ , различающиеся видом тензора  $\psi_{ik}$ .