

термодинамического потенциала Φ :

$$\Phi_e = \Phi_{0e} - \frac{\pi^2}{6} v_F V T^2, \quad (61,8)$$

где теперь v_F и V предполагаются выраженными через P (по «нулевому» приближению, т. е. при $T=0$).

Определяя из (61,8) энтропию, а затем теплоемкость, найдем

$$C_e = \frac{\pi^2}{3} v_F V T. \quad (61,9)$$

Решеточная же часть теплоемкости пропорциональна T^3 (при температурах, малых по сравнению с дебаевской Θ); поэтому при достаточно низких температурах электронный вклад в теплоемкость становится преобладающим¹⁾.

По этой же причине становится преобладающим в этой области температур также и электронный вклад в тепловое расширение металла. Определяя из (61,8) объем $V = \partial\Phi/\partial P$, а затем коэффициент теплового расширения α , найдем

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -T \frac{\pi^2}{3V} \frac{\partial (V v_F)}{\partial P}. \quad (61,10)$$

Отметим, что здесь (как и в области $T \gg \Theta$ — см. V § 67) отношение

$$\frac{\alpha V}{C} = - \frac{\partial \ln (V v_F)}{\partial P}$$

оказывается не зависящим от температуры.

§ 62. Гриновская функция электронов в металле

Проведенное в §§ 56—58 рассмотрение относилось к движению одного электрона в решетке, на которую наложено еще внешнее магнитное поле. Покажем теперь, что полученные при этом результаты остаются по существу справедливыми и для квазичастиц (электронов проводимости) в электронной жидкости реального металла, — меняется лишь несколько определение входящих в соотношения величин (Ю. А. Бычков, Л. П. Горьков, 1961; J. M. Luttinger, 1961). Подходящим математическим аппаратом для общего рассмотрения электронной жидкости является аппарат гриновских функций.

В главе II этот аппарат был развит для «свободной» ферми-жидкости. Выясним, в каких пунктах он должен быть изменен для жидкости в решетке.

¹⁾ Малым параметром разложения в (61,9) является отношение T/ε_F , а в решеточной теплоемкости — отношение T/Θ . Поэтому обе части теплоемкости сравниваются при $T^2 \sim \Theta^2/\varepsilon_F$.

Гриновская функция электронной жидкости (при температуре $T=0$) определяется через гейзенберговские ψ -операторы электронов той же формулой (7,9), где усреднение происходит по основному состоянию металла. В силу однородности времени эта функция зависит от аргументов t_1 и t_2 только через их разность $t=t_1-t_2$. Пространственная же однородность нарушена теперь наличием внешнего по отношению к жидкости поля решетки. Поэтому гриновская функция зависит не только от разности $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$. Можно лишь утверждать, что она инвариантна относительно одновременного сдвига \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 на один и тот же (любой) период решетки. Ниже мы будем рассматривать гриновскую функцию в ω , \mathbf{r} -представлении, т. е. введем ее фурье-компоненту по t : $G_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Именно эта функция позволяет, в принципе, определить энергетический спектр электронной жидкости в металле. Повторим (не производя вновь всех вычислений) применительно к данному случаю изложенные в § 8 рассуждения.

В § 8 было показано, что однородность системы позволяет полностью определить координатную зависимость матричных элементов ψ -операторов и тем самым позволяет записать общее выражение гриновской функции в пространственно-временном представлении в виде (8,5—6); отсюда можно было затем перейти и к ее импульсному представлению в виде разложения (8,7).

Для электронной жидкости в решетке инвариантность матричных элементов, выражаемая равенством (8,3), имеет место только для трансляций на периоды решетки, т. е. при $\mathbf{r}=\mathbf{a}$. Это приводит, естественно, к меньшей определенности в координатной зависимости: вместо (8,4) можно утверждать лишь, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) | m\mathbf{k} \rangle &= \chi_{\alpha m\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_{m_0}(\mathbf{k})t), \\ \langle m\mathbf{k} | \hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) | 0 \rangle &= \chi_{\alpha m, -\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(i\omega_{m_0}(\mathbf{k})t), \end{aligned} \quad (62,1)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha m\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \\ \chi_{\alpha m, -\mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} v_{\alpha m\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (62,2)$$

\mathbf{k} —квазиимпульс состояния; m —совокупность остальных характеризующих его квантовых чисел, а u и v —некоторые периодические в решетке функции координат (мы выписали матричные элементы только для переходов из основного состояния—состояния 0). По своим свойствам функции $\chi^{(+)}$ и $\chi^{(-)}$ аналогичны блоховским волновым функциям электрона в периодическом поле. Выразив гриновскую функцию через эти матричные элементы и переходя затем к компонентам Фурье по времени (подобно тому, как это было сделано в § 8), получим теперь

вместо формулы (8,7) разложение

$$G_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{m, \mathbf{k}} \left\{ \frac{\chi_{\alpha m \mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}_1) \chi_{\beta m \mathbf{k}}^{(+)*}(\mathbf{r}_2)}{\omega + \mu - \varepsilon_{m \mathbf{k}}^{(+)} + i0} + \frac{\chi_{\alpha m \mathbf{k}}^{(-)}(\mathbf{r}_1) \chi_{\beta m \mathbf{k}}^{(-)*}(\mathbf{r}_2)}{\omega + \mu - \varepsilon_{m \mathbf{k}}^{(-)} - i0} \right\} \quad (62,3)$$

с прежним смыслом обозначений $\varepsilon^{(+)}$ и $\varepsilon^{(-)}$; во втором члене произведено переобозначение $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$.

Наличие незатухающих одночастичных элементарных возбуждений вблизи ферми-поверхности металла проявляется в том, что при ε вблизи μ энергия состояния зависит только от \mathbf{k} . Для таких состояний функция $G_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ имеет полюс при $\omega = \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu$. Вблизи полюса она имеет вид

$$G_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\chi_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{r}_1) \chi_{\beta \mathbf{k}}^*(\mathbf{r}_2)}{\omega + \mu - \varepsilon(\mathbf{k}) + i0 \cdot \text{sign } \omega}. \quad (62,4)$$

При наличии вырождения по спинам должно еще производиться суммирование по двум спиновым состояниям.

Определение энергетического спектра по гриновской функции сводится, в принципе, к задаче о собственных значениях некоторого интегро-дифференциального линейного оператора.

Основные принципы диаграммной техники в координатном пространстве для рассматриваемого случая остаются теми же, что и в обычной ферми-жидкости. В частности, введя собственную-энергетическую функцию $\Sigma_{\alpha\beta}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (как сумму определенной в § 14 совокупности диаграмм), можно записать гриновскую функцию $G_{\alpha\beta}(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в виде ряда (14,3), который суммируется к диаграммному уравнению (14,4). Тонкая сплошная линия на этих диаграммах обозначает гриновскую функцию $G_{\alpha\beta}^{(0)}(t, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ свободных электронов — не взаимодействующих ни с другими электронами, ни с решеткой. Согласно (9,6), эта функция удовлетворяет уравнению

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta_I}{2m} + \mu \right) G_{\alpha\beta}^{(0)}(t, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta_{\alpha\beta} \delta(t) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Применив слева к уравнению (14,4) оператор (...) и перейдя затем к фурье-компонентам по времени, получим искомое уравнение

$$\left(\omega + \mu + \frac{\Delta_I}{2m} \right) G_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \int \Sigma_{\alpha\gamma}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}') G_{\gamma\beta}(\omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}_2) d^3x' = \\ = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (62,5)$$

Вблизи полюса G -функции (по переменной ω), правая сторона уравнения может быть опущена, и получается однородное интегро-дифференциальное уравнение, собственные значения которого и определяют энергетический спектр системы. При этом

индекс β и переменная \mathbf{r}_2 не затрагиваются никакими операциями, т. е. играют в уравнении роль несущественных параметров. Для определения спектра можно писать поэтому уравнение вида ¹⁾

$$\left(\omega + \mu + \frac{\Delta_1}{2m}\right) \chi_\alpha(\mathbf{r}) - \int \Sigma_{\alpha\gamma}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi_\gamma(\mathbf{r}') d^3x' \equiv (\omega - \hat{L}) \chi(\mathbf{r}) = 0. \quad (62,6)$$

Для электронной ферми-жидкости в металле оно заменяет собой обычное уравнение Шредингера. Его собственные значения определяют, как уже сказано, спектр согласно $\omega = \varepsilon(\mathbf{k}) - \mu$; соответствующими же собственными функциями являются функции $\chi_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ из (62,4) (как это очевидно из прямой подстановки (62,4) в (62,5)). Поскольку затухание возбуждений вблизи ферми-поверхности мало, оператор \hat{L} при малых ω эрмитов (с точностью до членов порядка ω).

Для перехода к случаю наличия слабого внешнего магнитного поля надо заметить, что при калибровочном преобразовании векторного потенциала ψ -операторы преобразуются как волновые функции (ср. (44,3—4)), а потому гриновская функция $G_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ преобразуется как произведение ψ -функций $\psi(\mathbf{r}_1) \psi^*(\mathbf{r}_2)$. Это значит, что и функция $\chi(\mathbf{r})$ в (62,6) должна преобразовываться как обычная ψ -функция. Но, проследив за произведенными в § 56 рассуждениями, легко обнаружить, что в них использованы только периодичность решетки кристалла, общие свойства калибровочного преобразования и тот факт, что энергетический спектр определяется по собственным значениям некоторого гамильтониана; роль последнего играет в данном случае оператор \hat{L} в (62,6) ²⁾. Поэтому ясно, что и результат — правило перехода от спектра в отсутствие поля к спектру при наличии слабого поля — будет тем же: новый спектр определяется по собственным значениям гамильтониана

$$\varepsilon\left(\mathbf{K} - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}})\right), \quad \hat{\mathbf{r}} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}}, \quad (62,7)$$

¹⁾ Для микроскопически однородной ферми-жидкости это уравнение в импульсном представлении сводится к уравнению (14,13)

$$\omega + \mu = \varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) + \Sigma(\omega, \mathbf{p}).$$

²⁾ Может показаться существенным отличием в этой связи, что в (62,6) оператор \hat{L} сам зависит от ω . В действительности это означает лишь неявный способ записи гамильтониана. При малых ω (вблизи ферми-поверхности) можно перейти и к явной записи, разложив $\hat{L} \approx \hat{L}_0 + \omega \hat{L}_1$ и умножив затем уравнение $\hat{L}_0 \chi = \omega (1 - \hat{L}_1) \chi$ слева на оператор $(1 - \hat{L}_1)^{-1}$.

где $\varepsilon(\mathbf{k})$ — спектр в отсутствие поля. Разумеется, смысл самой функции $\varepsilon(\mathbf{k})$ теперь отличается от ее смысла в (56,7) — в ней учитывается коллективное взаимодействие всех электронов в системе.

Далее, поскольку проведенное в §§ 57, 58 рассмотрение квазиклассического случая целиком основывалось на существовании гамильтониана вида (62,7), то и эти результаты непосредственно переносятся на электронную жидкость. При этом, однако, возникает вопрос о том, что именно следует понимать под напряженностью поля, действующего на электрон проводимости (а тем самым — и под векторным потенциалом \mathbf{A}). Строго говоря, это должно быть точное микроскопическое значение поля, создаваемого в данной точке \mathbf{r} всеми электронами (и внешним полем). Но в квазиклассическом случае характерные размеры r_H области, в которой происходит взаимодействие («лармеров радиус орбит»), велики по сравнению с порядком величины межэлектронных расстояний (совпадающим с постоянной решетки a). Это обстоятельство приводит к автоматическому усреднению микроскопического поля. Происхождение этого усреднения можно пояснить следующими рассуждениями.

Представим микроскопическую напряженность в виде суммы ее среднего значения (которое, по принятой в макроскопической электродинамике терминологии, есть магнитная индукция \mathbf{B}) и быстро меняющейся части $\dot{\mathbf{H}}$. Векторный потенциал, отвечающий однородному полю \mathbf{B} , возрастает на всем протяжении размеров орбиты, принимая характерные значения $\sim Br_H$. Потенциал же, отвечающий осциллирующему на расстояниях $\sim a$ полю $\dot{\mathbf{H}}$, не возрастает систематически и набирает лишь значения $\sim Va$, которыми можно пренебречь по сравнению с Br_H . Между тем, как было объяснено в § 56, именно потенциал поля определяет квантование движения электронов. Таким образом, мы приходим к выводу, что достаточно учитывать лишь потенциал \mathbf{A} однородной индукции $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, которая и будет играть роль действующего на электрон поля (*D. Shoenberg*, 1962). Мы увидим ниже (конец § 63), что это обстоятельство может привести к некоторым новым явлениям в намагничении металлов.

Таким образом, правило квазиклассического квантования (58,7) для электронной жидкости в металле записывается как

$$S(\varepsilon, k_z) = \frac{2\pi |e|}{\hbar c} B \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (62,8)$$

где теперь $S(\varepsilon, k_z)$ — площадь сечения истинных изоэнергетических поверхностей электронов проводимости металла (близких к его ферми-поверхности).

Как и в задаче об одном электроне в решетке с центром инверсии¹⁾, учет спина электронов проводимости приводит к расщеплению уровней в магнитном поле на две компоненты:

$$\varepsilon_{n\sigma}(k_z) = \varepsilon_n(k_z) + \sigma\beta\xi(k_z)B, \quad \sigma = \pm 1. \quad (62,9)$$

Величина $\xi(k_z)$ представляет собой результат усреднения некоторой функции $\xi(\mathbf{k})$ по квазиклассической траектории. При этом, с достаточной точностью, все траектории можно считать лежащими на самой ферми-поверхности, так что результат усреднения зависит только от k_z . Подчеркнем, что для электронной ферми-жидкости отличие величины $\xi(k_z)$ от единицы (ее значения для свободных электронов) связано не только со спин-орбитальным взаимодействием, но и с обменным взаимодействием электронов друг с другом.

§ 63. Эффект де Гааза — ван Альфена

Магнитная восприимчивость металла в слабых магнитных полях ($\beta B \ll T$, β — магнетон Бора, B — магнитная индукция) не может быть вычислена в общем виде. Дело в том, что в рамках теории ферми-жидкости можно рассматривать только парамагнитную (спиновую) часть восприимчивости: эта часть определяется электронами проводимости вблизи ферми-поверхности, поскольку спины электронов в глубине распределения взаимно скомпенсированы. В диамагнитную же (орбитальную) часть восприимчивости вносят вклад все электроны, в том числе из глубины распределения, где понятие квазичастиц в теории ферми-жидкости уже теряет смысл. Между тем обе части восприимчивости, вообще говоря, одного порядка величины, а реальный физический смысл имеет только их сумма.

Обратимся к «сильным» полям, когда

$$T \ll \beta B \ll \mu, \quad (63,1)$$

т. е. интервалы между уровнями Ландау сравнимы с температурой, но все еще малы по сравнению с химическим потенциалом. В этом случае пара- и диамагнитная части намагниченности вообще не могут быть разделены, но здесь ситуация меняется в том отношении, что в намагниченности металла появляется осцилляционная зависимость от напряженности поля (*эффект де Гааза — ван Альфена*)²⁾. Монотонная часть намагниченности и здесь зависит от всех электронов в металле и не может быть вычислена в рамках теории ферми-жидкости. Осцил-

¹⁾ Фактически кристаллические решетки всех металлов обладают центром инверсии.

²⁾ Ср. V § 60, где этот эффект рассматривался для идеального электронного газа.