

ный отрезок ad , проведенный так, чтобы заштрихованные на рисунке две площади были равны; участки же ab и cd отвечают метастабильным состояниям.

Пусть металлический образец представляет собой цилиндр с осью, направленной вдоль внешнего поля \mathfrak{H} . Тогда напряженность H внутри цилиндра совпадает с \mathfrak{H} и по мере увеличения последнего тело будет испытывать последовательные фазовые переходы со скачкообразными изменениями индукции: каждый раз при достижении такой точки, как a , индукция меняется скачком от значения B_a к значению B_a^1). Если же образец представляет собой плоскую пластинку в перпендикулярном ей магнитном поле, то происходит разбиение тела на чередующиеся слои (*диамагнитные домены*) с различной индукцией — вполне аналогично разбиению сверхпроводника в промежуточном состоянии на нормальные и сверхпроводящие слои (*J. H. Condon, 1966*). Внешнее поле \mathfrak{H} совпадает в этом случае со значением магнитной индукции, усредненным по всем слоям. Так, в интервале $B_a < \mathfrak{H} < B_a^1$ пластинка разбивается на слои с индукциями B_a и B_a^1 и, по мере возрастания \mathfrak{H} , объем вторых возрастает за счет объема первых.

§ 64. Электрон-фононное взаимодействие

До сих пор мы рассматривали электроны проводимости в кристалле, отвлекаясь от их взаимодействия с колебаниями решетки, т. е. с фононами. Это взаимодействие выражает тот факт, что деформация решетки изменяет поле, в котором движется электрон; это изменение поля называют *деформационным потенциалом*.

Электрон-фононное взаимодействие играет определяющую роль в кинетических явлениях в полупроводниках и металлах, но здесь нас будет интересовать только качественное влияние этого взаимодействия на энергетический спектр электронов. Для его изучения целесообразно отвлечься от усложнений, связанных с анизотропией решетки и ее микроскопической неоднородностью. Другими словами, рассматриваем среду как микроскопически однородную, изотропную жидкость, соответственно чему в ней возможны лишь продольные звуковые колебания.

В первом приближении по деформации потенциал, отвечающий такой упрощенной модели, представим в виде

$$U_{\text{деф}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \int \mathcal{W}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho'(\mathbf{r}') d^3x', \quad (64, 1)$$

¹⁾ Предполагается, что поверхностная энергия границы раздела между фазами положительна.

где ρ' — переменная часть плотности среды (а ρ — ее постоянное равновесное значение). Функция $W(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ убывает на длинах порядка межатомных расстояний a . Мы упростим выражение (64,1) еще дальше, заметив, что для взаимодействия с фононами с волновыми векторами $k \ll 1/a$ эти расстояния можно считать равными нулю, т. е. положить $W = \omega \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, где ω — постоянная. Тогда $U_{\text{деф}} = \omega \rho'(\mathbf{r})/\rho$. В квантовой теории, в представлении вторичного квантования, этот потенциал записывается как гамильтониан электрон-фононного взаимодействия

$$\hat{H}_{ep} = \frac{\omega}{\rho} \int \hat{\Psi}_{\alpha}^{+}(t, \mathbf{r}) \hat{\rho}'(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\alpha}(t, \mathbf{r}) d^3x, \quad (64,2)$$

где операторы $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^{+}$ относятся к электронам, а $\hat{\rho}'$ — гейзенберговский оператор плотности, описывающий фононное поле; для свободных (не взаимодействующих с электронами) фононов он дается формулой (24,10).

В математическом аппарате гриновских функций в применении к электрон-фононному взаимодействию появляется наряду с гриновской функцией электронов G еще и фононная гриновская функция, определяемая как

$$D(X_1, X_2) \equiv D(X_1 - X_2) = -i \langle T \hat{\rho}'(X_1) \hat{\rho}'(X_2) \rangle, \quad (64,3)$$

причем хронологическое произведение раскрывается по правилу (31,2), отвечающему случаю бозонов. Для свободных фононов гриновская функция в импульсном представлении

$$D^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\rho k}{2u} \left\{ \frac{1}{\omega - uk + i0} - \frac{1}{\omega + uk - i0} \right\} = \frac{\rho k^2}{\omega^2 - u^2 k^2 + i0} \quad (64,4)$$

(см. задачу к § 31; в промежуточных формулах полагаем $\hbar = 1$).

Рассматривая электрон-фононное взаимодействие как малое возмущение, можно построить основанную на операторе (64,2) диаграммную технику подобно тому, как это было сделано в § 13 для парного взаимодействия фермионов. Не повторяя заново всех рассуждений, сформулируем получающиеся правила составления диаграмм (в импульсном представлении)¹⁾.

Основными элементами диаграмм являются электронные (сплошные) и фононные (пунктирные) линии, каждой из которых приписывается определенный «4-импульс». Электронной линии с 4-импульсом P ставится в соответствие множитель $iG_{\alpha\beta}^{(0)} = i\delta_{\alpha\beta} G^{(0)}(P)$ — гриновская функция свободных электронов. Фонон-

¹⁾ Структура выражения (64,2) для оператора электрон-фононного взаимодействия аналогична структуре оператора электрон-фотонного взаимодействия в квантовой электродинамике. В связи с этим аналогичны и правила диаграммной техники в обоих случаях.

ной линии с 4-импульсом K сопоставляется множитель $iD^{(0)}(K)$ — гриновская функция свободных фононов. В каждой вершинной точке диаграммы сходятся две сплошные и одна пунктирная линии; такой точке дополнительно сопоставляется множитель $-i\omega/\rho$.

Так, первая поправка к электронной гриновской функции изображается диаграммой¹⁾



$$(64,5)$$

которой отвечает аналитическое выражение

$$i\delta G(P) = -\frac{\omega^2}{\rho^2} [G^{(0)}(P)]^2 \int G^{(0)}(P-K) \dot{D}^{(0)}(K) \frac{d^4K}{(2\pi)^4}. \quad (64,6)$$

Первая поправка к фоновой гриновской функции изображается диаграммой



$$(64,7)$$

или в аналитическом виде

$$i\delta D(K) = 2 \frac{\omega^2}{\rho^2} [D^{(0)}(K)]^2 \int G^{(0)}(P) G^{(0)}(P-K) \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \quad (64,8)$$

(коэффициент 2 возникает от свертывания спиновых множителей: $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha} = 2$; учтен также множитель -1 , связанный с наличием одной замкнутой фермионной петли — ср. § 13).

Покажем, что электрон-фононное взаимодействие в металле приводит к появлению «эффективного притяжения» между электронами вблизи ферми-поверхности. Оно может быть описано наглядно как результат испускания виртуального фонона одним и его поглощения другим электроном (*J. Bardeen, 1950; H. Fröhlich, 1950*).

¹⁾ Диаграмма с замкнутой на себя электронной линией (подобная диаграмме (13,13а)) отсутствует ввиду того, что $D^{(0)}(0) = 0$. При этом подразумевается, что переход к пределу $k \rightarrow 0$ совершается прежде, чем $\omega \rightarrow 0$. Это отражает обстоятельство, что в координатном пространстве интегрирование по d^3x (как раз и означающее в данном случае переход к $k \rightarrow 0$) содержится уже в определении гамильтониана (64,2) и потому совершается до интегрирования по времени, возникающего при применении теории возмущений к этому гамильтониану.

Рассмотрим диаграмму

$$(64,9)$$

изображающую рассеяние двух электронов, осуществляющееся через обмен виртуальными фононами; 4-импульсы $P = (\varepsilon - \mu, \mathbf{p})$, $K = (\omega, \mathbf{k})$, μ — химический потенциал электронов при $T = 0$, совпадающий с граничной энергией ε_F . Этой диаграмме отвечает вершинная функция

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta} = \Gamma \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}, \quad i\Gamma = \left(-\frac{i\omega}{\rho} \right)^2 iD^{(0)}(K),$$

или

$$\Gamma = -\frac{\omega^2 k^2}{\rho(\omega^2 - u^2 k^2 + i0)}, \quad (64,10)$$

причем $\hbar\omega = \varepsilon_1' - \varepsilon_1$, $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1$.

По порядку величины, импульсы электронов вблизи ферми-поверхности $p \sim p_F \sim \hbar/a$. Рассеянию электронов на угол ~ 1 отвечает импульс фонона $\hbar k \sim \hbar/a$ и его энергия $\hbar\omega k \sim \hbar u/a \sim \hbar\omega_D$, где ω_D — дебаевская частота (для металлов $\hbar\omega_D \ll \varepsilon_F$). С другой стороны, электрон не может отдать энергию большую, чем $\varepsilon - \varepsilon_F$. Поэтому, если для обоих электронов $|\varepsilon - \varepsilon_F| \ll \hbar\omega_D$, то заведомо

$$\Gamma \approx \omega^2 / \rho u^2 > 0. \quad (64,11)$$

Учитывая смысл Γ как амплитуды рассеяния (§ 16), мы видим, что ее знак соответствует притяжению между частицами. Подчеркнем, что этот результат относится лишь к электронам в сравнительно узком слое (ширины $\sim \hbar\omega_D$ по энергии) импульсного пространства вблизи ферми-поверхности. Это обстоятельство было уже использовано в § 43 для установления величины параметра обрезания в теории сверхпроводимости металлов¹⁾.

§ 65. Влияние электрон-фононного взаимодействия на электронный спектр в металле

Рассмотрим вопрос о влиянии, оказываемом электрон-фононным взаимодействием на энергетический спектр электронов в металле²⁾.

¹⁾ Что касается постоянной ω , то для грубой оценки ее для металлов можно заметить, что изменение энергии электрона должно достигать порядка величины ее самой ($\sim \varepsilon_F$), когда изменение плотности $\rho' \sim \rho$. Отсюда $\omega \sim \varepsilon_F$.

²⁾ Излагаемые в этом параграфе результаты принадлежат А. Б. Мигдалу (1958).