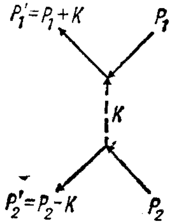
Рассмотрим диаграмму



(64,9)

изображающую рассеяние двух электронов, осуществляющееся через обмен виртуальными фононами; 4-импульсы $P=(\varepsilon-\mu, \mathbf{p})$, $K=(\omega, \mathbf{k})$, μ — химический потенциал электронов при $T=0$, совпадающий с граничной энергией ε_F. Этой диаграмме отвечает вершинная функция

$$\Gamma_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}=\Gamma\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}, \quad i\Gamma=\left(-\frac{iw}{\rho}\right)^2 iD^{(0)}(K),$$

или

$$\Gamma=-\frac{w^2k^2}{\rho\,(\omega^2-u^2k^2+i0)}, \tag{64,10}$$

причем $\hbar\omega=\varepsilon_1'-\varepsilon_1$, $\hbar\mathbf{k}=\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_1$.

По порядку величины, импульсы электронов вблизи ферми-поверхности $p\sim p_F\sim\hbar/a$. Рассеянию электронов на угол ~ 1 отвечает импульс фонона $\hbar k\sim\hbar/a$ и его энергия $\hbar uk\sim\hbar u/a\sim\hbar\omega_D$, где ω_D — дебаевская частота (для металлов $\hbar\omega_D\ll\varepsilon_F$). С другой стороны, электрон не может отдать энергию большую, чем $\varepsilon-\varepsilon_F$. Поэтому, если для обоих электронов $|\varepsilon-\varepsilon_F|\ll\hbar\omega_D$, то заведомо

$$\Gamma\approx w^2/\rho u^2>0. \tag{64,11}$$

Учитывая смысл Γ как амплитуды рассеяния (§ 16), мы видим, что ее знак соответствует притяжению между частицами. Подчеркнем, что этот результат относится лишь к электронам в сравнительно узком слое (ширины $\sim\hbar\omega_D$ по энергии) импульсного пространства вблизи ферми-поверхности. Это обстоятельство было уже использовано в § 43 для установления величины параметра обрезания в теории сверхпроводимости металлов[1]).

§ 65. Влияние электрон-фононного взаимодействия на электронный спектр в металле

Рассмотрим вопрос о влиянии, оказываемом электрон-фононным взаимодействием на энергетический спектр электронов в металле[2]).

[1]) Что касается постоянной w, то для грубой оценки ее для металлов можно заметить, что изменение энергии электрона должно достигать порядка величины ее самой ($\sim\varepsilon_F$), когда изменение плотности $\rho'\sim\rho$. Отсюда $w\sim\varepsilon_F$.

[2]) Излагаемые в этом параграфе результаты принадлежат *А. Б. Мигдалу* (1958).

В § 14 было показано, что для спектра фермиевского типа поправка к закону дисперсии $\varepsilon(\mathbf{p})$ (по сравнению со спектром системы свободных фермионов) определяется разностью

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p})=\Sigma(\varepsilon-\mu,\ \mathbf{p})-\Sigma(0,\ \mathbf{p}), \tag{65,1}$$

где $\Sigma=G^{(0)-1}-G^{-1}$ — собственно-энергетическая функция. В данном же случае речь идет о поправке, вызванной взаимодействием с фононами, а роль «невозмущенного» играет спектр, учитывающий «прямое» взаимодействие частиц (электронов). Согласно (64,6), имеем [1])

$$\Sigma(P)=-\delta G^{-1}=\delta G/G^{(0)2}=i\,\frac{w^2}{\rho^2}\int G^{(0)}(P-K)\,D^{(0)}(K)\,\frac{d^4K}{(2\pi)^4}, \tag{65,2}$$

но под $G^{(0)}$ надо понимать теперь гриновскую функцию взаимодействующих друг с другом электронов. Вблизи своего полюса такая функция имеет вид

$$G^{(0)}(\varepsilon-\mu,\ \mathbf{p})=Z\left[\varepsilon-\mu-v_F^{(0)}(p-p_F)+i0\cdot\operatorname{sign}(\varepsilon-\mu)\right]^{-1} \tag{65,3}$$

(см. (10,2)); индекс (0) у v_F означает, что в этой величине еще не учтено влияние электрон-фононного взаимодействия.

Наша цель состоит теперь в оценке величины (65,1), т. е. интеграла

$$\delta\varepsilon=$$
$$=\frac{iw^2}{\rho^2}\int\left\{G^{(0)}(\varepsilon-\mu-\omega,\ \mathbf{p}-\mathbf{k})-G^{(0)}(-\omega,\ \mathbf{p}-\mathbf{k})\right\}D^{(0)}(\omega,\ \mathbf{k})\,\frac{d^4K}{(2\pi)^4}. \tag{65,4}$$

Как видно из последующих вычислений, основной вклад в этот интеграл дает область, в которой импульс $\mathbf{p}-\mathbf{k}$ и энергия $\varepsilon-\omega$ (как и сами $\mathbf{p}$ и ε) лежат вблизи ферми-поверхности, т. е. $k\ll p_F$, $\omega\ll\mu$. По этой причине для функций $G^{(0)}$ можно использовать (65,3).

В сферических координатах в $\mathbf{k}$-пространстве с осью вдоль $\mathbf{p}$ имеем $d^4K=2\pi k^2\,dk\,d\omega\,d\cos\theta$, где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$. Вместо $\cos\theta$ введем переменную $p_1=|\mathbf{p}-\mathbf{k}|$; заметив, что $p_1^2=p^2+k^2-2pk\cos\theta$, имеем

$$d^4K=2\pi k^2\,dk\,d\omega p_1\,dp_1/pk\approx 2\pi k\,dk\,d\omega\,dp_1$$

(мы положили $p_1\approx p\approx p_F$).

В подынтегральном выражении в (65,4) от p_1 зависит только множитель в фигурных скобках, равный

$$\{\cdots\}=-(\varepsilon-\mu)Z\left[\varepsilon-\mu-\omega-v_F^{(0)}(p_1-p_F)+i0\cdot\operatorname{sign}(\varepsilon-\mu-\omega)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[-\omega-v_F^{(0)}(p_1-p_F)-i0\cdot\operatorname{sign}\omega\right]^{-1}.$$

[1]) В промежуточных формулах полагаем $\hbar=1$.

Ввиду быстрой сходимости интеграла по $d(p_1-p_F)$, можно распространить интегрирование до $\pm\infty$; введя переменную $\eta = v_F^{(0)}(p_1-p_F)$, получим интеграл

$$\int\{\cdots\}\,dp_1 = -\frac{(\varepsilon-\mu)Z}{v_F^{(0)}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{[\eta-(\varepsilon-\mu-\omega)-i0\cdot\operatorname{sign}(\varepsilon-\mu-\omega)]\,[\eta+\omega+i0\cdot\operatorname{sign}\omega]}\,.$$

Если оба полюса подынтегрального выражения находятся по одну сторону от вещественной оси, то интеграл обращается в нуль (в чем убеждаемся, замкнув путь интегрирования в другой полуплоскости). Поэтому интеграл отличен от нуля, лишь если $\varepsilon-\mu>\omega>0$ или $\varepsilon-\mu<\omega<0$; в первом случае он равен $-2\pi iZ/v_F^{(0)}$, а во втором $2\pi iZ/v_F^{(0)}$. Учтя также четность функции $D^{(0)}(\omega, \mathbf{k})$ по переменной ω, находим, таким образом,

$$\delta\varepsilon = \frac{Zw^2}{8\pi^2\rho u v_F^{(0)}}\int\int_0^{|\varepsilon-\mu|}\left[\frac{1}{\omega-uk+i0}-\frac{1}{\omega+uk-i0}\right]k^2\,d\omega\,dk. \quad (65,5)$$

Вещественная и мнимая части этого выражения определяют соответственно поправку к спектру квазичастиц (электронов проводимости) и их затухание. Рассмотрим сначала затухание.

Отделяя в (65,5) мнимую часть по правилу (8,11), находим

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon = \frac{Zw^2}{8\pi\rho u v_F^{(0)}}\int k^2\,dk; \quad (65,6)$$

интегрирование по k производится по области от 0 до $|\varepsilon-\mu|/u$, в которой полюс $\omega=uk$ подынтегрального выражения в (65,5) лежит в интервале между 0 и $|\varepsilon-\mu|$. Таким образом (в обычных единицах),

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon = \frac{Zw^2|\varepsilon-\mu|^3}{24\pi\hbar^3\rho u^4 v_F^{(0)}}\,. \quad (65,7)$$

Для грубой оценки этой величины замечаем, что параметры $v_F^{(0)}$ и w имеют электронное происхождение и выражаются, по порядку величины, лишь через межатомные расстояния a и массу электрона m: $v_F^{(0)}\sim p_F/m\sim\hbar/am$, $w\sim\varepsilon_F\sim\hbar^2/ma^2$ (см. примечание на стр. 318). Плотность же ρ и скорость звука u зависят еще и от массы ионов M, причем $\rho\propto M$, $u\propto M^{-1/2}$, так что $\rho u^4\propto 1/M$. Поэтому оценку затухания можно записать в виде

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon\sim|\varepsilon-\mu|^3(\hbar\omega_D)^{-2}, \quad (65,8)$$

где дебаевская частота $\omega_D\sim u/a\propto M^{-1/2}$.

Строго говоря, оценка (65,8) относится к значениям $|\varepsilon-\mu| \ll \hbar\omega_D$, при которых интегрирование в (65,6) производится по области $k < |\varepsilon-\mu|/u\hbar \ll \omega_D/u$, где действительно применим используемый нами закон дисперсии фононов $\omega = ku$. Но для грубой оценки по порядку величины можно применить (65,8) и на краю области при $\varepsilon-\mu \sim \hbar\omega_D$, где она дает

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon \sim \hbar\omega_D \sim \varepsilon-\mu. \qquad (65,9)$$

Наконец, при $\varepsilon-\mu \gg \hbar\omega_D$ область интегрирования в (65,6) не зависит от $\varepsilon-\mu$, так как полюс $\omega = uk \leqslant \omega_D$ всегда лежит в интервале между 0 и $\varepsilon-\mu$. В этом случае $\int k^2\,dk \sim (\omega_D/u)^3$, и затухание

$$-\operatorname{Im}\delta\varepsilon \sim \hbar\omega_D \ll \varepsilon-\mu. \qquad (65,10)$$

Выражения (65,8—10) определяют специфическое затухание, связанное с испусканием фононов электронами[1]). Мы видим, что в непосредственной близости к ферми-поверхности при $|\varepsilon-\mu| \ll \hbar\omega_D$, согласно (65,8), затухание мало ($|\operatorname{Im}(\varepsilon-\mu)| \ll |\varepsilon-\mu|$), так что понятие о квазичастицах — электронах проводимости — имеет вполне четкий смысл. В области же $\varepsilon-\mu \sim \hbar\omega_D$ затухание квазичастицы становится сравнимым с самой ее энергией, спектр размывается и в значительной степени теряет смысл. Однако на еще больших расстояниях над ферми-поверхностью при $\varepsilon-\mu \gg \hbar\omega_D$ (но, разумеется, по-прежнему $\varepsilon-\mu \ll \mu$), согласно (65,10), затухание, оставаясь тем же по абсолютной величине, снова становится малым по сравнению с энергией $\varepsilon-\mu$, и квазичастицы снова приобретают определенный смысл. Разумеется, наряду с фононным затуханием электронов проводимости всегда имеется также и затухание от электрон-электронных столкновений. Это затухание, характерное для всякой нормальной ферми-жидкости (§ 1), пропорционально $(\varepsilon-\mu)^2$ и по порядку величины $\sim(\varepsilon-\mu)^2/\mu$, т. е. всегда мало в области применимости теории.

Оценим теперь поправку к вещественной части ε, т. е. к самому спектру.

Вещественная часть интеграла по $d\omega$ в (65,5) дается его главным значением

$$\operatorname{Re}\int_0^{|\varepsilon-\mu|} D^{(0)}(\omega,\ \mathbf{k})\,d\omega = \frac{\rho k}{2u} \mathrm{P} \int_0^{|\varepsilon-\mu|} \left\{\frac{1}{\omega-uk} - \frac{1}{\omega+uk}\right\} d\omega = \\ = \frac{\rho k}{2u} \ln\left|\frac{\varepsilon-\mu-uk}{\varepsilon-\mu+uk}\right|.$$

---

[1]) Сохранение энергии при рождении квазичастицей фонона малой частоты выражается равенством $(\partial\varepsilon/\partial\mathbf{k})\,\delta\mathbf{k} \equiv \mathbf{v}\,\delta\mathbf{k} = u\,\delta k$; оно может выполняться лишь при $v > u$. В металле это условие всегда выполняется, поскольку $v_F \gg u$.

Поэтому для $\operatorname{Re}\delta\varepsilon$ имеем (обычные единицы)

$$\operatorname{Re}\delta\varepsilon = \frac{Zw^2}{8\pi^2\rho u v_F^{(0)}} \int k^2 \ln\left|\frac{\varepsilon-\mu-\hbar uk}{\varepsilon-\mu+\hbar uk}\right| dk. \qquad (65,11)$$

При $\varepsilon-\mu \gg \hbar\omega_D$ логарифм в подынтегральном выражении $\sim \hbar uk/(\varepsilon-\mu)$, и весь интеграл оценивается как $\hbar uk^3_{max}/(\varepsilon-\mu) \sim \sim \hbar u/a^3(\varepsilon-\mu)$. Замечая также, что в силу наличия множителя ρ в знаменателе в (65,11) все это выражение $\propto 1/M$, приходим к оценке

$$\operatorname{Re}\delta\varepsilon \sim (\hbar\omega_D)^2/(\varepsilon-\mu) \ll \varepsilon-\mu.$$

Таким образом, в этом случае поправка в спектре относительно мала, так что спектр дается выражением

$$\varepsilon-\mu \approx v_F^{(0)}(p-p_F) \quad \text{при} \quad \varepsilon-\mu \gg \hbar\omega_D \qquad (65,12)$$

с «невозмущенным» значением скорости на ферми-поверхности $v_F^{(0)}$.

В области же $\varepsilon-\mu \ll \hbar\omega_D$ логарифм в (65,11) $\sim(\varepsilon-\mu)/\hbar uk$, и интеграл оценивается как $(\varepsilon-\mu)k^2_{max}/\hbar u \sim (\varepsilon-\mu)/\hbar u a^2$. Все выражение (65,11) оказывается в результате пропорциональным $\varepsilon-\mu$ с коэффициентом, не зависящим от массы иона M (так как произведение ρu^2 не зависит от M). Это значит, что спектр в этой области будет снова того же типа

$$\varepsilon-\mu \approx v_F(p-p_F) \quad \text{при} \quad \varepsilon-\mu \ll \hbar\omega_D, \qquad (65,13)$$

но со скоростью v_F, отличающейся от $v_F^{(0)}$ на величину порядка ее самой [1]).

Таким образом, спектр фермиевского типа для электронов в металле характеризуется двумя различными значениями скорости v_F и $v_F^{(0)}$ — одним в непосредственной близости к ферми-поверхности ($\varepsilon-\mu \ll \hbar\omega_D$), а другим — при $\varepsilon-\mu \gg \hbar\omega_D$. В термодинамических свойствах металла при низких температурах ($T \ll \hbar\omega_D$) фигурирует параметр v_F из (65,13). Такие же явления, как оптические свойства металла для частот $\omega \gg \omega_D$, определяются скоростью $v_F^{(0)}$.

Задача

Определить затухание длинноволновых ($k \ll p_F$) фононов в металле за счет их поглощения электронами.

---

[1]) Разумеется, в этих условиях использование первого приближения теории возмущений становится, строго говоря, некорректным. Учет следующих приближений не может изменить, однако, самого характера полученного результата: когда первая поправка становится порядка единицы, того же порядка и остальные поправки.

Решение. Поправка к гриновской функции фононов дается, согласно (64,8), интегралом

$$i\delta D^{-1}(K) = -\frac{2w^2}{\rho^2}\int G^{(0)}(P)\,G^{(0)}(P-K)\,\frac{d^4P}{(2\pi)^4}, \qquad P=(p_0,\ \mathbf{p}), \quad K=(\omega,\ \mathbf{k}).$$

В G-функциях надо, однако, еще учесть поправки, связанные со взаимодействием электронов с коротковолновыми фононами. Согласно сказанному в тексте, эти поправки приводят просто к замене $G^{(0)}$ на функцию G, отличающуюся от (65,3) лишь заменой скорости $v_F^{(0)}$ на v_F, и перенормировочной постоянной Z на некоторую другую Z'. При малых K для произведения $G^{(0)}(P)\,G^{(0)}(P-K)$ можно воспользоваться формулой (17,10). Интегрирование по dp_0dp сводится к устранению δ-функций, после чего остается еще интегрирование по $d\cos\theta$ (θ—угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$);

$$\delta D^{-1}(\omega,\ k) = -\frac{Z'^2w^2p_F^2k}{2\pi^2\rho^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos\theta\, d\cos\theta}{\omega - v_Fk\cos\theta + i0}$$

(полагаем $\omega > 0$). Полюс $\cos\theta = \omega/kv_F$ находится внутри области интегрирования (поскольку $v_F > u$), и мнимая часть интеграла

$$\operatorname{Im}\delta D^{-1} = \frac{Z'^2w^2p_F^2\omega}{2\pi\rho^2v_F^2k}.$$

Закон дисперсии фононов определяется как корень уравнения $D^{(0)-1} + \delta D^{-1} = 0$, откуда находим (в обычных единицах)

$$\omega = uk(1-i\alpha), \qquad \alpha = \frac{Z'^2w^2p_F^2}{4\pi\hbar^3\rho uv_F^2}$$

(поправкой к вещественной части ω не интересуемся). Произведение $\rho u \propto \sqrt{M}$; поэтому в грубой оценке $\alpha \sim \sqrt{m/M}$, т. е. затухание всегда мало.

§ 66. Электронный спектр твердых диэлектриков

Характерная особенность электронного энергетического спектра диэлектрического немагнитного кристалла состоит в том, что уже первый возбужденный уровень находится на конечном расстоянии от основного уровня; другими словами, между основным уровнем и спектром возбужденных уровней имеется энергетическая щель (у обычных диэлектриков—порядка нескольких электрон-вольт).

Элементарное возбуждение в диэлектрическом кристалле может быть наглядно описано как возбужденное состояние атома, которое, однако, нельзя приписывать какому-либо определенному атому; трансляционная симметрия решетки, как всегда, приводит к «коллективизированию» возбуждения, распространяющегося в кристалле, как бы перескакивая от одного атома к другому. Как и в других случаях, эти возбуждения можно рассматривать как квазичастицы (называемые в этом случае

11*