ГЛАВА VII

МАГНЕТИЗМ

§ 69. Уравнение движения магнитного момента в ферромагнетике

Магнитная структура кристаллов приводит к появлению у них специфических ветвей энергетического спектра. Переходя к исследованию этих спектров, напомним прежде всего некоторые особенности взаимодействий в магнитных телах.

Основным видом взаимодействий в ферромагнетиках является обменное взаимодействие атомов, которое и приводит к установлению спонтанной намагниченности. Характерным свойством этого взаимодействия является его независимость от ориентации намагниченности относительно решетки: обменное взаимодействие является результатом электростатического взаимодействия электронов с учетом симметрии волновой функции системы и не зависит от направления суммарного спина[1]).

Простейшей ферромагнитной системой является диэлектрик, в кристаллической решетке которого имеются атомы, обладающие магнитным моментом, причем знак обменного взаимодействия таков («ферромагнитен»), что энергетически выгодно параллельное положение моментов. Тогда основным состоянием системы будет состояние, в котором все спины параллельны. Точнее, в этом состоянии проекция суммарного спина системы на некоторое направление равна максимально возможному значению Σs_a (сумма по всем атомам), где s_a — спин одного атома. Действительно, гамильтониан обменного взаимодействия $\hat{H}_{об}$ коммутативен с оператором полного спина системы $\hat{\mathbf{S}}$, а значит и с его проекцией $\hat{S}_z$ (это следует из того, что $\hat{H}_{об}$ не зависит от направления спинов, а оператор $\hat{\mathbf{S}}$ и есть оператор поворота в спиновом пространстве). Поэтому основное состояние должно обладать определенным значением S_z, а минимуму энергии соответствует максимальное S_z. Заметим, что тогда равны своим максимальным значениям s_a и проекции s_z спи-

1) Экспериментальные данные о гиромагнитных отношениях g, дающие для ферромагнетиков значения, очень близкие к 2, свидетельствуют о спиновой природе ферромагнетизма.

нов каждого из атомов, так что магнитный момент в основном состоянии равен своему «номинальному» значению $\Sigma\mu_a$, где μ_a — магнитный момент одного атома. Это свойство, однако, нарушается более слабыми — релятивистскими — взаимодействиями.

В более сложных случаях намагниченность тела не равна номинальной. В частности, когда взаимодействие не между всеми атомами носит ферромагнитный характер, возможно образование структур из двух противоположно намагниченных подрешеток, намагниченности которых различны и потому не вполне компенсируются; вещества со структурой такого типа называют ферритами (случай же полной компенсации соответствует антиферромагнетику).

Наконец, в ферромагнитном металле нельзя рассматривать спины атомов независимо от электронов проводимости, которые во всяком случае не будут (из-за эффектов фермиевского вырождения) полностью намагничены даже при $T=0$. Особенности магнитных взаимодействий могут привести также к более сложной структуре основного состояния ферромагнетика с неколлинеарным расположением атомов магнитных моментов — так называемые геликоидальные структуры.

Как и во всякой макроскопической системе, слабо возбужденные состояния ферромагнетика можно рассматривать как совокупность элементарных возбуждений — газ квазичастиц. Элементарные возбуждения в упорядоченном распределении атомных магнитных моментов называют *магнонами*. Поскольку речь идет о квазичастицах в трансляционно-симметричной кристаллической решетке, магноны обладают определенными не истинными импульсами, а квазиимпульсами, пробегающими значения в одной ячейке обратной решетки. В классической картине магнонам отвечают *спиновые волны* — распространяющиеся вдоль решетки колебания магнитных моментов. Магноны подчиняются статистике Бозе, и предельному классическому случаю спиновых волн отвечают большие числа заполнения состояний магнонов.

Если длина спиновой волны велика по сравнению с постоянной решетки a (т. е. волновой вектор $k \ll 1/a$), то волну можно рассматривать макроскопически; в результате закон дисперсии волн $\omega(\mathbf{k})$ будет выражен через феноменологические параметры (материальные константы), входящие в макроскопические уравнения движения магнитных моментов. Тем самым будет выражен через эти параметры и спектр магнонов $\varepsilon=\hbar\omega(\mathbf{k})$. Такой путь определения спектра магнонов вполне аналогичен определению спектра длинноволновых фононов через макроскопические параметры (упругие модули), входящие в макроскопические уравнения колебаний в звуковых волнах. Для выполнения этой программы необходимо предварительно вывести указанные уравнения движения[1]).

Проведем сначала рассмотрение с учетом только обменных взаимодействий.

Поскольку мы интересуемся слабо возбужденными состояниями ферромагнетика (только их свойства и могут быть выяснены в общем виде), мы должны ограничиться «медленными» движениями магнитного момента с малыми частотами. Такими будут движения, в которых направление магнитного момента медленно меняется в пространстве, а его величина остается постоянной. Действительно, равновесная величина намагниченности фиксирована обменным взаимодействием; поэтому ее изменение во всяком случае связано с конечной затратой энергии при любой длине волны (предполагается, что тело находится достаточно далеко от своей точки Кюри, в которой спонтанная намагниченность исчезает). С другой стороны, энергия не меняется при повороте магнитного момента тела как целого; поэтому неоднородный вдоль тела поворот намагниченности будет требовать тем меньшей энергии, чем больше длина волны (другими словами, длинноволновые колебания будут иметь малую частоту). Искомое уравнение для плотности магнитного момента (намагниченности) $\mathbf{M}$ должно поэтому иметь вид, сохраняющий $|\mathbf{M}|$:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = [\mathbf{\Omega M}], \tag{69,1}$$

где $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость прецессии момента, которую мы сейчас определим. Мы пишем уравнение движения как дифференциальное уравнение первого порядка по времени, поскольку при малых частотах высшими производными можно пренебречь.

Для определения $\mathbf{\Omega}$ необходимо учесть, что при больших длинах волн и низких температурах диссипация энергии при изменении намагниченности мала и ею можно пренебречь (мы вернемся к обоснованию этого предположения в конце § 70). Для выяснения же вопроса о том, как выглядит условие отсутствия диссипации, будем рассматривать магнитный момент магнетика как независимый параметр, равновесное распределение которого находится минимизацией свободной энергии. Мы будем производить минимизацию при постоянных температуре, объеме тела и значении напряженности поля $\mathbf{H}$ в каждой точке тела; термодинамическим потенциалом по отношению к этим пере-

[1]) Дальнейшие результаты этого параграфа принадлежат *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лифшицу* (1935). Отметим, что эти результаты справедливы для «обменных» ферромагнетиков. Мы не будем касаться здесь так называемого слабого ферромагнетизма, в котором ферромагнитный момент появляется только при учете релятивистских взаимодействий.

менным является свободная энергия $\tilde{F}$[1]). Вариацию $\delta\tilde{F}$ при бесконечно малом изменении **M** можно записать как

$$\delta\tilde{F} = -\int \mathbf{H}_{\text{эф}}\delta\mathbf{M}\,dV, \qquad (69,2)$$

где мы ввели обозначение $\mathbf{H}_{\text{эф}}$ для «эффективного поля» по аналогии с выражением для энергии магнитного момента во внешнем магнитном поле. В равновесии $\mathbf{H}_{\text{эф}} = 0$.

Диссипация энергии при изменении намагниченности со временем вычисляется как производная

$$Q = T\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial R_{\min}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t},$$

где S — энтропия тела, а $R_{\min}$ — минимальная работа, необходимая для приведения тела в данное неравновесное состояние. С помощью (69,1) имеем, таким образом,

$$Q = \int \mathbf{H}_{\text{эф}}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}dV = \int \mathbf{H}_{\text{эф}}[\mathbf{\Omega}\mathbf{M}]\,dV. \qquad (69,3)$$

Отсюда видно, что в отсутствие диссипации вектор $\mathbf{\Omega}$ должен быть параллелен вектору $\mathbf{H}_{\text{эф}}$, так что можно положить $\mathbf{\Omega} = \text{const}\cdot\mathbf{H}_{\text{эф}}$. После этого уравнение (69,1) примет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \text{const}\,[\mathbf{H}_{\text{эф}}\mathbf{M}]; \qquad (69,4)$$

смысл и значение постоянной выяснятся ниже.

Согласно определению (69,2), явный вид эффективного поля находится варьированием полной свободной энергии тела. Последняя дается интегралом

$$\tilde{F} = \int \left\{ f_0(M) + U_{\text{неод}} - \mathbf{M}\mathbf{H} - \frac{H^2}{8\pi} \right\} dV \qquad (69,5)$$

(см. VIII § 36). Здесь $f_0(M)$ — плотность свободной энергии однородно намагниченного тела при $H=0$, учитывающая лишь обменные взаимодействия и потому не зависящая от направления **M**. $U_{\text{неод}}$ есть плотность дополнительной обменной энергии, связанной с медленным изменением направления вектора **M** вдоль неоднородно намагниченного тела.

---

[1]) См. VIII § 36 (термодинамические величины, относящиеся к телу в целом, обозначались там буквами рукописного шрифта). При неоднородном распределении правильнее говорить о свободной энергии тела (при заданном его объеме), а не о термодинамическом потенциале $\tilde{\Phi}$. Мы не будем интересоваться здесь стрикционными эффектами, т. е. напряжениями и деформациями кристалла, возникающими при изменении намагниченности.

Первые члены разложения этой энергии по степеням производных от момента **M** по координатам имеют вид

$$U_{\text{неод}} = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k}, \tag{69,6}$$

причем эта квадратичная (по производным) форма существенно положительна. Выражение (69,6) составлено так, чтобы (в соответствии со свойствами обменного взаимодействия) не зависеть от абсолютного направления вектора **M**. В одноосных кристаллах симметричный тензор второго ранга α_{ik} имеет компоненты $\alpha_{xx}=\alpha_{yy}\equiv\alpha_1$, $\alpha_z\equiv\alpha_2$ (ось z — ось симметрии кристалла); в кубических кристаллах $\alpha_{ik}=\alpha\delta_{ik}$.

Порядок величины коэффициентов α_{ik} можно оценить, заметив, что энергия неоднородности, отнесенная к объему одной элементарной ячейки кристаллической решетки, должна была бы достигать характерных атомных значений энергии обменного взаимодействия, если бы направление момента существенно менялось на расстояниях порядка постоянной решетки a. Характерная обменная энергия совпадает, по порядку величины, с температурой Кюри T_c (точка исчезновения ферромагнетизма). Из условия $T_c/a^3 \sim \alpha M^2/a^2$ находим

$$\alpha \sim T_c/aM^2. \tag{69,7}$$

Варьируя интеграл (69,5) (при заданных значениях **H** в каждой точке тела) и произведя во втором члене интегрирование по частям, получим

$$\delta\tilde{F} = \int\left\{f_0'(M)\frac{\mathbf{M}}{M} - \alpha_{ik}\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial x_i\,\partial x_k} - \mathbf{H}\right\}\delta\mathbf{M}\,dV;$$

во втором члене произведено интегрирование по частям. Согласно определению (69,2), выражение в фигурных скобках есть $-\mathbf{H}_{\text{эф}}$. Первый член в нем направлен вдоль **M**, но при подстановке в уравнение движения (69,4) такой член все равно выпадает, и потому его можно вообще опустить[1]). Таким образом, находим

$$\mathbf{H}_{\text{эф}} = \alpha_{ik}\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \mathbf{H}. \tag{69,8}$$

При учете одних только обменных взаимодействий, не зависящих от направления магнитного момента, для однородно намагниченного тела уравнение (69,4) должно сводиться к уравнению движения свободно прецессирующего момента:

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} = \frac{g|e|}{2mc}[\mathbf{HM}],$$

[1]) После этого, однако, $\mathbf{H}_{\text{эф}}$ уже не обязательно будет обращаться в нуль в равновесии.

где $e=-|e|$, m — заряд и масса электрона, а g — гиромагнитное отношение ферромагнетика (ср. II § 45). С другой стороны, при однородном намагничении $\mathbf{H}_{эф}=\mathbf{H}$; отсюда следует, что постоянный коэффициент в (69,4) $\mathrm{const}=g|e|/2mc$, так что уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}=\frac{g|e|}{2mc}[\mathbf{H}_{эф}\mathbf{M}] \tag{69,9}$$

с $\mathbf{H}_{эф}$ из (69,8).

Для получения полной системы уравнений сюда надо добавить еще уравнение Максвелла, связывающее поле $\mathbf{H}$ с распределением намагниченности $\mathbf{M}$. Спиновые волны, которые будут рассмотрены в следующем параграфе, являются низкочастотными в том смысле, что $\omega \ll ck$. В этих условиях поле квазистационарно; в уравнениях Максвелла можно пренебречь производными по времени, и они сводятся к виду

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B}=\mathrm{div}\,(\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M})=0. \tag{69,10}$$

В связи с этим может возникнуть вопрос о правомерности варьирования интеграла (69,5) по $\mathbf{M}$ при постоянном $\mathbf{H}$ несмотря на то, что они связаны вторым уравнением (69,10). Дело, однако, в том, что если положить $\mathbf{H}=-\nabla\varphi$ (в виду первого уравнения) и вычислить вариацию интеграла по φ, то она обратится в силу второго уравнения в нуль, так что варьирование $\mathbf{H}$ не дает вклада в $\delta\tilde{F}$.

Если тело не находится во внешнем магнитном поле, то поле внутри него целиком связано с распределением намагниченности и представляет собой, вообще говоря, величину того же порядка, что и $\mathbf{M}$. В этом смысле член $\mathbf{H}$ в эффективном поле (69,8) представляет собой релятивистский эффект (напомним, что атомные магнитные моменты, а с ними и спонтанная намагниченность $\mathbf{M}$, определяются магнетоном Бора $\beta=|e|\hbar/2mc$, — величиной, содержащей c в знаменателе). Поэтому в рассматриваемом пока чисто обменном приближении второй член в (69,8) следует опустить, так что уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}=\frac{g|e|}{2mc}\alpha_{ik}\left[\frac{\partial^2\mathbf{M}}{\partial x_i\partial x_k}\mathbf{M}\right]. \tag{69,11}$$

Обратим внимание на нелинейность этого уравнения.

Уравнение (69,11) можно переписать в виде уравнения непрерывности для магнитного момента:

$$\frac{\partial M_i}{\partial t}+\frac{\partial \Pi_{il}}{\partial x_l}=0,$$

где тензор потока момента имеет вид

$$\Pi_{il}=\frac{g|e|}{2mc}\alpha_{ik}\left[\mathbf{M}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial x_k}\right]_i.$$

Этого следовало ожидать заранее, поскольку в обменном приближении полный магнитный момент тела сохраняется.

Учтем теперь, что наряду с обменными в ферромагнетике существуют также и значительно более слабые релятивистские взаимодействия электронных моментов: спин-спиновые и спин-орбитальные. В макроскопической теории они описываются энергией магнитной анизотропии, плотность которой $U_{\text{ан}}$ зависит от направления вектора намагниченности по отношению к кристаллической решетке; этими взаимодействиями устанавливается равновесное направление спонтанной намагниченности ферромагнетика. К релятивистским относится, как уже было указано, также и взаимодействие **M** с магнитным полем **H**.

В одноосном кристалле энергия анизотропии имеет вид

$$U_{\text{ан}} = -\frac{K}{2} M_z^2. \tag{69,12}$$

Если $K > 0$, то равновесная намагниченность направлена вдоль оси симметрии — ось z (ферромагнетик типа «легкая ось»); если же $K < 0$, то направление спонтанной намагниченности лежит в плоскости xy (ферромагнетик типа «легкая плоскость»). В кубическом кристалле энергия анизотропии может быть представлена в виде

$$U_{\text{ан}} = \frac{K'}{M^2}(M_x^2 M_y^2 + M_x^2 M_z^2 + M_y^2 M_z^2), \tag{69,13}$$

где оси x, y, z направлены вдоль трех осей симметрии четвертого порядка (ребра кубических ячеек). Если $K' > 0$, то равновесный вектор **M** направлен вдоль одного из ребер кубических ячеек, а если $K' < 0$ — то вдоль одной из пространственных диагоналей ячеек[1]).

Для определенности, будем рассматривать одноосный ферромагнетик. Добавив к подынтегральному выражению в (69,5) член $U_{\text{ан}}$ (69,12), получим после варьирования дополнительный член $-KM_z\boldsymbol{\nu}\delta\mathbf{M}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении оси симметрии кристалла. Таким образом, для эффективного поля находим

$$\mathbf{H}_{\text{эф}} = \alpha_{ik}\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x_i \partial x_k} + KM_z\boldsymbol{\nu} + \mathbf{H}. \tag{69,14}$$

Легко видеть, что этим изменением эффективного поля исчерпываются изменения, которые учет релятивистских эффектов вносит в уравнение движения (69,9). Действительно, пренебре-

[1]) Безразмерные величины K, K' для различных ферромагнетиков имеют значения, лежащие в широком интервале от десятых долей единицы до десятков. Порядок же величины отношения релятивистских взаимодействий к обменному характеризуется величиной $a^3U_{\text{ан}}/T_c$ и составляет обычно 10^{-4}—10^{-5}.

жение диссипацией означает по-прежнему, что правая часть уравнения движения должна быть перпендикулярна $\mathbf{H}_{эф}$, т. е. должна иметь вид $[\mathbf{M}'\mathbf{H}_{эф}]$, где $\mathbf{M}'$ может отличаться от $\mathbf{M}$ лишь за счет релятивистских поправок, всегда малых по сравнению с большой величиной $\mathbf{M}$ и потому несущественных. Релятивистские же члены в $\mathbf{H}_{эф}$ добавляются к величине, малой в силу медленности изменения $\mathbf{M}$ вдоль тела; эти члены могут стать существенными при достаточно больших длинах волн.

§ 70. Магноны в ферромагнетике. Спектр

Применим полученные в предыдущем параграфе уравнения к распространению волн, в которых плотность магнитного момента совершает малые колебания, прецессируя относительно своего равновесного значения $\mathbf{M}_0$. Мы будем рассматривать однодоменный образец, во всем объеме которого $\mathbf{M}_0$ постоянно, и ограничимся случаем волн с длиной, много меньшей размеров образца. Тогда среду можно рассматривать как неограниченную.

Рассмотрим сначала вопрос с учетом только обменных взаимодействий, т. е. на основе уравнения (69,11). Положим $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}$, где $\mathbf{m}$—малая величина, и линеаризуем уравнение, отбросив члены второго порядка по $\mathbf{m}$; поскольку абсолютная величина $M = M_0$, то в этом приближении $\mathbf{m} \perp \mathbf{M}_0$. Получим

$$\dot{\mathbf{m}} = \frac{|e|}{mc}\alpha_{ik}\left[\frac{\partial^2\mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k}\mathbf{M}_0\right] \qquad (70,1)$$

(здесь и ниже полагаем $g=2$). Для $\mathbf{m}$, зависящего от координат и времени как $\exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]$, находим

$$i\omega\mathbf{m} = \frac{|e|}{mc}\alpha k^2[\mathbf{m}\mathbf{M}_0], \qquad (70,2)$$

где $\alpha = \alpha(\mathbf{n}) = \alpha_{ik}n_i n_k$, $\mathbf{n}$—единичный вектор в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$. Раскрыв это уравнение в компонентах, имеем

$$i\omega m_x = \frac{|e|}{mc}\alpha M k^2 m_y,$$
$$i\omega m_y = -\frac{|e|}{mc}\alpha M k^2 m_x$$

(ось z—в направлении $\mathbf{M}_0$). Отсюда находим закон дисперсии спиновых волн[1])

$$\omega = \frac{|e|M}{mc}\alpha(\mathbf{n})k^2. \qquad (70,3)$$

[1]) Квадратичный закон дисперсии спиновых волн был впервые найден с помощью микроскопической теории *Ф. Блохом* (*F. Bloch*, 1930). Выражение этого спектра через макроскопические параметры дано *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лифшицем* (1945).