жение диссипацией означает по-прежнему, что правая часть уравнения движения должна быть перпендикулярна $\mathbf{H}_{эф}$, т. е. должна иметь вид $[\mathbf{M}'\mathbf{H}_{эф}]$, где $\mathbf{M}'$ может отличаться от $\mathbf{M}$ лишь за счет релятивистских поправок, всегда малых по сравнению с большой величиной $\mathbf{M}$ и потому несущественных. Релятивистские же члены в $\mathbf{H}_{эф}$ добавляются к величине, малой в силу медленности изменения $\mathbf{M}$ вдоль тела; эти члены могут стать существенными при достаточно больших длинах волн.

§ 70. Магноны в ферромагнетике. Спектр

Применим полученные в предыдущем параграфе уравнения к распространению волн, в которых плотность магнитного момента совершает малые колебания, прецессируя относительно своего равновесного значения $\mathbf{M}_0$. Мы будем рассматривать однодоменный образец, во всем объеме которого $\mathbf{M}_0$ постоянно, и ограничимся случаем волн с длиной, много меньшей размеров образца. Тогда среду можно рассматривать как неограниченную.

Рассмотрим сначала вопрос с учетом только обменных взаимодействий, т. е. на основе уравнения (69,11). Положим $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}$, где $\mathbf{m}$—малая величина, и линеаризуем уравнение, отбросив члены второго порядка по $\mathbf{m}$; поскольку абсолютная величина $M = M_0$, то в этом приближении $\mathbf{m} \perp \mathbf{M}_0$. Получим

$$\dot{\mathbf{m}} = \frac{|e|}{mc}\alpha_{ik}\left[\frac{\partial^2\mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k}\mathbf{M}_0\right] \qquad (70,1)$$

(здесь и ниже полагаем $g = 2$). Для $\mathbf{m}$, зависящего от координат и времени как $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, находим

$$i\omega\mathbf{m} = \frac{|e|}{mc}\alpha k^2[\mathbf{m}\mathbf{M}_0], \qquad (70,2)$$

где $\alpha = \alpha(\mathbf{n}) = \alpha_{ik}n_i n_k$, $\mathbf{n}$—единичный вектор в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$. Раскрыв это уравнение в компонентах, имеем

$$i\omega m_x = \frac{|e|}{mc}\alpha M k^2 m_y,$$
$$i\omega m_y = -\frac{|e|}{mc}\alpha M k^2 m_x$$

(ось z—в направлении $\mathbf{M}_0$). Отсюда находим закон дисперсии спиновых волн [1])

$$\omega = \frac{|e|M}{mc}\alpha(\mathbf{n})k^2. \qquad (70,3)$$

---

[1]) Квадратичный закон дисперсии спиновых волн был впервые найден с помощью микроскопической теории *Ф. Блохом* (*F. Bloch*, 1930). Выражение этого спектра через макроскопические параметры дано *Л. Д. Ландау* и *Е. М. Лифшицем* (1945).

Мы видим, в соответствии со сказанным в начале предыдущего параграфа, что в обменном приближении частота стремится к нулю при $k \to 0$. Вектор $\mathbf{m}$ в спиновой волне вращается в плоскости xy с постоянной угловой скоростью ω, оставаясь постоянным по абсолютной величине.

В квантовой картине формула (70,3) определяет энергетический спектр магнонов $\varepsilon = \hbar\omega$ [1]):

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta M\alpha(\mathbf{n})k^2. \qquad (70,4)$$

В формализме вторичного квантования макроскопические величины, описывающие ферромагнетик, заменяются операторами, выраженными через операторы уничтожения и рождения магнонов. Покажем, как это должно быть сделано для магнонов (70,4).

Приведем в соответствие с классической величиной $\mathbf{M}$ векторный оператор $\hat{\mathbf{M}}$, компоненты которого удовлетворяют определенным правилам коммутации. Пусть $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\,\delta V$ — оператор суммарного спина атомов в физически бесконечно малом элементе объема δV в точке $\mathbf{r}$. Операторы $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_1)\,\delta V_1$ и $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_2)\,\delta V_2$, относящиеся к различным элементам δV_1 и δV_2, коммутативны. Компоненты же одного и того же оператора $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\,\delta V$ удовлетворяют обычным правилам коммутации момента:

$$\hat{S}_x\,\delta V\cdot\hat{S}_y\,\delta V - \hat{S}_y\,\delta V\cdot\hat{S}_x\,\delta V = i\hat{S}_z\,\delta V,$$

или $\hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S}_x = i\hat{S}_z/\delta V$ (и аналогично для остальных коммутаторов). В пределе $\delta V \to 0$ эти правила записываются для любых $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в едином виде

$$\hat{S}_x(\mathbf{r}_1)\,\hat{S}_y(\mathbf{r}_2) - \hat{S}_y(\mathbf{r}_2)\,\hat{S}_x(\mathbf{r}_1) = i\hat{S}_z(\mathbf{r}_1)\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2).$$

Умножив теперь это равенство на $4\beta^2$ и заметив, что оператор намагниченности $\hat{\mathbf{M}} = -2\beta\hat{\mathbf{S}}$, получим

$$\hat{M}_x(\mathbf{r}_1)\,\hat{M}_y(\mathbf{r}_2) - \hat{M}_y(\mathbf{r}_2)\,\hat{M}_x(\mathbf{r}_1) = -2i\beta\hat{M}_z(\mathbf{r}_1)\,\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \qquad (70,5)$$

В применении к спиновым волнам, в которых $\mathbf{M}$ испытывает малые колебания вокруг оси z, в первом приближении по малым величинам m_x, m_y можно заменить в правой стороне (70,5) оператор $\hat{M}_z$ числом $M_z \approx M$; тогда

$$\hat{m}_x(\mathbf{r}_1)\,\hat{m}_y(\mathbf{r}_2) - \hat{m}_y(\mathbf{r}_2)\,\hat{m}_x(\mathbf{r}_1) = -2i\beta M\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \qquad (70,6)$$

Отсюда видно, что величины m_y и m_x играют (с точностью до постоянных множителей) в данном случае роль канонически

---

[1]) В этой главе β везде обозначает магнетон Бора: $\beta = |e|\hbar/2mc$.

сопряженных «обобщенных координат и импульсов» — подобно тому, как φ и ρ' играли такую же роль при квантовании звуковых волн в жидкости (§ 24). Подчеркнем, однако, существенное отличие между обоими случаями. Правило коммутации (24,7) для фононных операторов является точным, не связанным с малостью колебаний (т. е. с малостью чисел заполнения фононных состояний). Правило же (70,6) является приближенным, справедливым лишь в первом приближении по малой величине $\mathbf{m}$.

Исходя из правила коммутации (70,6) и соотношения между операторами $\hat{m}_x$ и $\hat{m}_y$, отвечающего линейным уравнениям (70,1), можно найти выражения этих операторов через операторы уничтожения и рождения магнонов, подобно тому как это было сделано в § 24 для фононов (см. задачу 4 к § 71).

Вернемся к изучению спектра магнонов и обратимся к учету влияния релятивистских эффектов на этот спектр. Теперь уже необходимо учитывать и магнитное поле $\mathbf{H}$, возникающее при колебаниях $\mathbf{M}$. Оно будет того же порядка малости, что и $\mathbf{m}$; обозначим его здесь как $\mathbf{h}$.

Уравнения Максвелла (69,10) дают

$$[\mathbf{kh}] = 0, \quad \mathbf{kh} = -4\pi\mathbf{km}.$$

Отсюда видно, что поле $\mathbf{h}$ направлено вдоль волнового вектора и равно

$$\mathbf{h} = -4\pi(\mathbf{nm})\mathbf{n}. \tag{70,7}$$

Подставив (70,7) в последние два члена подынтегрального выражения в (69,5), получим

$$-\mathbf{mh} - \frac{h^2}{8\pi} = 2\pi(\mathbf{nm})^2 \tag{70,8}$$

(здесь опущен член $\mathbf{M}_0\mathbf{h}$, который ввиду потенциальности поля $\mathbf{h}$ при интегрировании по всему объему преобразуется в интеграл по поверхности и обращается в нуль); эту часть энергии анизотропии в спиновой волне иногда называют *магнитостатической*.

Пусть ферромагнетик одноосен и относится к типу «легкая ось», так что $\mathbf{M}_0$ направлено вдоль оси симметрии кристалла (ось z): $\mathbf{M}_0 = \boldsymbol{\nu}M$. Имея в виду дальнейшие применения, допустим также существование внешнего поля $\mathfrak{H}$, параллельного тому же направлению $\boldsymbol{\nu}$; при этом образец надо представлять себе как цилиндр с осью вдоль $\boldsymbol{\nu}$. Тогда поле внутри тела $\mathbf{H} = \mathfrak{H} + \mathbf{h}$. Линеаризованное уравнение движения (которое мы выписываем уже умноженным на $\hbar$)

$$-i\varepsilon\mathbf{m} = 2\beta\left\{\left(\alpha k^2 + K + \frac{\mathfrak{H}}{M}\right)[\boldsymbol{\nu}\mathbf{m}] - [\boldsymbol{\nu}\mathbf{h}]\right\}. \tag{70,9}$$

Для одноосного кристалла $\alpha = \alpha_1 \sin^2\theta + \alpha_2 \cos^2\theta$, где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\nu}$.

Подставив сюда $\mathbf{h}$ из (70,7), расписываем уравнение в компонентах (причем ось x удобно выбрать в плоскости, проходящей через направления $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{n}$). Из условия совместности получающихся двух уравнений для m_x и m_y находим закон дисперсии

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta M \left[\left(\alpha k^2 + K + \frac{\mathfrak{H}}{M}\right)\left(\alpha k^2 + K + \frac{\mathfrak{H}}{M} + 4\pi \sin^2\theta\right)\right]^{1/2}. \tag{70,10}$$

Отметим, что благодаря наличию члена $\sin^2\theta = k_x^2/k^2$ разложение $\varepsilon(\mathbf{k})$ по степеням компонент $\mathbf{k}$ не имеет простого степенного характера; это связано с дальнодействующим характером магнитных взаимодействий.

Выражение вида (70,10), выведенное здесь для одноосного ферромагнетика (типа «легкая ось»), справедливо и для кубических кристаллов. Это следует из того, что изменение энергии анизотропии при малых отклонениях вектора $\mathbf{M}$ от своего равновесного направления имеет в обоих случаях одинаковый вид. Так, для кубического кристалла с $K' > 0$ изменение $\delta U_{\text{ан}}$ при отклонении $\mathbf{M}$ от направления $\mathbf{M}_0$ вдоль ребра куба зависит только от угла ϑ между $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_0$ и равно $\delta U_{\text{ан}} = K'M^2\vartheta^2$. Сравнив это с аналогичным выражением $\delta U_{\text{ан}} = KM^2\vartheta^2/2$ для одноосного кристалла, мы видим, что для перехода к случаю кубического кристалла с $K' > 0$ достаточно заменить в (70,10) $K \to 2K'$. Аналогичным образом, легко убедиться, что для перехода к случаю кубического кристалла с $K' < 0$ (направление $\mathbf{M}_0$ вдоль пространственной диагонали куба) надо заменить $K \to 4|K'|/3$. Отметим также, что в кубическом кристалле величина $\alpha(\mathbf{n})$ сводится к постоянной. Для одноосного же ферромагнетика типа «легкая плоскость» ($K < 0$) ситуация иная: изменение $\delta U_{\text{ан}}$ при отклонении $\mathbf{M}$ от $\mathbf{M}_0$ зависит как от полярного угла, так и от азимута направления $\mathbf{M}$ относительно $\mathbf{M}_0$; поэтому этот случай требует особого рассмотрения — см. задачу.

Напомним, что результат (70,10) относится лишь к начальной части спектра, в которой квазиимпульсы $k \ll 1/a$ и допустимо макроскопическое рассмотрение. Со стороны больших, но удовлетворяющих этому условию значений k ($\alpha k^2 \gg 4\pi, K$) выражение (70,10) сводится к

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta M \alpha(\mathbf{n}) k^2 + 2\beta\mathfrak{H}. \tag{70,11}$$

Первый член здесь совпадает с чисто обменным выражением (70,4). Внешнее же поле добавляет к энергии магнона просто член $2\beta\mathfrak{H}$. В этом приближении, следовательно, магнон обладает проекцией момента на $\mathbf{M}_0$, равной -2β. Возбуждение в теле каждого магнона уменьшает полный магнитный момент тела на 2β.

В обратном случае, при $\mathbf{k}\to 0$, выражение (70,10) стремится к отличной от нуля величине, равной (при $\mathfrak{H}=0$)

$$\varepsilon(0)=2\beta MK\left(1+\frac{4\pi}{K}\sin^2\theta\right)^{1/2}. \qquad (70,12)$$

Таким образом, учет магнитной анизотропии приводит к появлению энергетической щели в спектре магнонов[1]). Это естественно, поскольку при наличии анизотропии даже поворот магнитного момента как целого (т. е. при $\mathbf{k}=0$) связан с конечной энергией. Мы видим, что при малых $\mathbf{k}$ релятивистские эффекты, несмотря на их малость, приводят к относительно большим поправкам к спектру.

Представление о магнонах как об элементарных возбуждениях относится к слабо возбужденным состояниям тела, а тем самым—к низким температурам. Поэтому в относящихся к магнонам формулах значения всех материальных констант (в том числе и намагниченности M) должны браться при $T=0$.

Вернемся к сделанному в § 69 предположению о слабости диссипации. В квантовой картине диссипация означает конечность времени жизни магнонов, обусловленную их взаимодействием друг с другом и с другими квазичастицами.

Если сначала говорить о взаимодействии магнонов друг с другом, то прежде всего надо отметить, что в обменном приближении число магнонов не меняется (каждый магнон дает в M_z одинаковый вклад -2β, а обменное взаимодействие сохраняет M_z). Поэтому в таком приближении возможны лишь процессы рассеяния. Их вероятность, однако, уменьшается с понижением температуры—уже просто из-за уменьшения числа рассеивателей,—так что обменное затухание во всяком случае стремится к нулю при $T=0$. Мы увидим ниже (§ 72), что состояние с одним магноном в обменном приближении есть действительно строго стационарное состояние системы[2]).

При $T=0$ затухание магнонов обусловлено только процессами их распада. Такие процессы возможны лишь за счет релятивистских взаимодействий, и уже поэтому их вероятность мала. Кроме того, при малых $\mathbf{k}$ вероятность распада всегда

[1]) Соответствующую частоту $\omega(0)=\varepsilon(0)/\hbar$ называют частотой *ферромагнитного резонанса*.

[2]) Отметим также, что сечение рассеяния двух магнонов друг на друге в обменном приближении стремится к нулю при уменьшении их энергии (см. § 73). Это обстоятельство дополнительно уменьшает обменное затухание магнонов при низких температурах. При достаточно низких температурах релятивистские эффекты существенны и для процессов рассеяния.

уменьшается за счет малости статистических весов (фазовых объемов) конечных состояний процесса.

Затухание магнонов вызывается также и их взаимодействием с фононами (роль оператора возмущения играет здесь зависящая от деформации кристалла часть гамильтониана обменного взаимодействия). При $T=0$ возможен процесс рождения фонона магноном; для этого, однако, квазиимпульс магнона должен быть достаточно велик — скорость магнона $\partial\varepsilon/\hbar\,\partial\mathbf{k}$ должна быть больше скорости звука (ср. примечание на стр. 321). Вероятность процесса мала также и за счет малости статистического веса конечного состояния.

Наконец, в ферромагнитном металле всегда возможно (за счет обменного взаимодействия с электронами проводимости) возбуждение магноном электрона из-под ферми-поверхности. И здесь вероятность процесса при малых $\mathbf{k}$ мала за счет малости статистического веса конечных состояний.

Задача

Найти спектр магнонов в одноосном ферромагнетике типа «легкая плоскость» ($K<0$).

Решение. Равновесная намагниченность $\mathbf{M}_0$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси симметрии кристалла (оси z); выберем направление $\mathbf{M}_0$ в качестве оси x. Линеаризованное уравнение движения магнитного момента имеет в этом случае вид

$$-i\varepsilon\mathbf{m}=2\beta\,\{\alpha k^2\,[\mathbf{n}_x\mathbf{m}]-|K|\,m_z\mathbf{n}_y-[\mathbf{n}_x\mathbf{h}]\},$$

где $\mathbf{n}_x$, $\mathbf{n}_y$ — единичные векторы вдоль координатных осей, а вектор $\mathbf{m}$ лежит в плоскости yz, перпендикулярной $\mathbf{M}_0$. Подставив сюда $\mathbf{h}$ из (70,7), расписав уравнение в компонентах и приравняв нулю определитель получающейся системы, получим спектр магнонов

$$\varepsilon(\mathbf{k})=2\beta M\,[\alpha k^2(\alpha k^2+|K|)+4\pi\sin^2\theta\,(\alpha k^2+|K|\sin^2\varphi)]^{1/2},$$

где θ и φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{k}$ относительно направления $\mathbf{M}_0$ (причем азимут отсчитывается от плоскости xz). При $\alpha k^2\gg 1$ мы возвращаемся к тому же квадратичному спектру (70,4), а при $k\to 0$ энергия магнона стремится к величине

$$\varepsilon(0)=4\,(\pi\,|K|)^{1/2}\,\beta M\,|\sin\theta\sin\varphi|,$$

обращающейся в нуль, когда вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости xz, образованной осью симметрии и спонтанной намагниченностью кристалла. Это обращение в нуль является, однако, приближенным: учет в энергии анизотропии членов более высокого порядка приводит к появлению анизотропии и в плоскости xy и тем самым — к конечной энергетической щели во всех направлениях $\mathbf{k}$[1]).

---

[1]) Напомним (см. VIII § 37), что разложение энергии анизотропии по степеням $\mathbf{M}$ есть в действительности разложение по релятивистскому отношению v/c (и не связано с малостью $\mathbf{M}$, т. е. с близостью к точке Кюри).