§ 71. Магноны в ферромагнетике. Термодинамические величины

Возбужденные в ферромагнетике магноны вносят определенный вклад в его термодинамические величины. Полученные в предыдущем параграфе результаты позволяют вычислить этот вклад при температурах, низких в том смысле, что $T \ll T_c$. Действительно, в тепловом равновесии при температуре T основная часть магнонов имеет энергии $\varepsilon \sim T$. Для квадратичного спектра

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta M \alpha(\mathbf{n}) k^2 \tag{71,1}$$

это значит, что при температурах $T \ll T_c$ возбуждены магноны с квазиимпульсами $k \ll (T_c/\beta M \alpha)^{1/2}$. Воспользовавшись оценкой (69,7) для α и оценив намагниченность как $M \sim \beta/a^3$ (на одну элементарную ячейку приходится магнитный момент порядка нескольких β), находим отсюда $ak \ll 1$, т. е. условие применимости результатов § 70.

«Магнонные» части термодинамических величин ферромагнетика вычисляются как термодинамические величины идеального бозе-газа с равным нулю химическим потенциалом. Так, для магнонной части термодинамического потенциала Ω имеем

$$\Omega_{\text{маг}} = T \int \ln\left(1 - e^{-\varepsilon/T}\right) \frac{V\,d^3k}{(2\pi)^3} \tag{71,2}$$

(см. V (54,4)). Отсюда для магнонного вклада во внутреннюю энергию[1])

$$E_{\text{маг}} = \Omega_{\text{маг}} - T\frac{\partial \Omega_{\text{маг}}}{\partial T} = \int \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - 1} \frac{V\,d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{71,3}$$

Магнонный же вклад в спонтанную намагниченность дает ее изменение с температурой. Он вычисляется как производная

$$M_{\text{маг}} \equiv M(T) - M(0) = -\frac{1}{V} \left.\frac{\partial \Omega_{\text{маг}}}{\partial \mathfrak{H}}\right|_{\mathfrak{H}\to 0}$$

по внешнему магнитному полю (ср. VIII (31,4)). Дифференцируя выражение (71,2), получим

$$M_{\text{маг}} = -\int \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathfrak{H}}\right|_{\mathfrak{H}\to 0} \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{71,4}$$

Производная $-(\partial\varepsilon/\partial\mathfrak{H})$ представляет собой собственный магнитный момент магнона.

---

[1]) При химическом потенциале $\mu = 0$ (а потому и $\Phi = N\mu = 0$) имеем $E = \Phi + TS - PV = TS + \Omega$; энтропия же $S = -\partial\Omega/\partial T$. Выражение (71,3) можно было бы, конечно, написать и непосредственно, без обращения к формуле (71,2).

Вычислим интегралы (71,3—4) при температурах $T \gg 2\pi\beta M$ [1]; тогда для спектра магнонов можно пользоваться предельным выражением (71,1). В виду быстрой сходимости интегралов интегрирование можно распространить по всему k-пространству (вместо одной ячейки обратной решетки). Полагая величину α постоянной (для кубических кристаллов) и заменив $d^3k \to 4\pi k^2\,dk$, после очевидной подстановки получим

$$E_{\text{маг}} = \frac{VT^{5/2}}{4\pi^2 A^{3/2}} \int\limits_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{e^x - 1} = V\frac{T^{5/2}\,\Gamma(^5/_2)\,\zeta(^5/_2)}{4\pi^2 A^{3/2}},$$

где для краткости обозначено $A = 2\beta M\alpha$ (так что $\varepsilon = Ak^2$) [2]. Для теплоемкости $C_{\text{маг}} = \partial E_{\text{маг}}/\partial T$ находим отсюда

$$C_{\text{маг}} = V\frac{5\Gamma(^5/_2)\,\zeta(^5/_2)}{8\pi^2 A^{3/2}}T^{3/2} = 0,113\left(\frac{T}{A}\right)^{3/2}V. \qquad (71,5)$$

Напомним, что это выражение дает лишь магнонную часть теплоемкости; наряду с ней теплоемкость кристалла содержит еще и обычную фононную часть.

Обращаясь к интегралу (71,4), подставляем, согласно (70,11) значение -2β для магнитного момента магнона. В результате при $T \gg 2\pi\beta M$ получим

$$M_{\text{маг}} = -\frac{\beta T^{3/2}}{2\pi^2 A^{3/2}} \int\limits_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^x - 1}, \qquad (71,6)$$

откуда

$$M(T) = M(0) - \frac{\beta T^{3/2}\,\Gamma(^3/_2)\,\zeta(^3/_2)}{2\pi^2 A^{3/2}} = M(0) - 0,117\beta\,(T/A)^{3/2} \qquad (71,7)$$

(магнонный вклад исчерпывает, конечно, все изменение намагниченности, поскольку фононы не несут с собой магнитного момента). Таким образом, изменение спонтанной намагниченности в области температур $2\pi\beta M \ll T \ll T_c$ следует закону $T^{3/2}$ (*F. Bloch*, 1930).

Наличие щели (70,10) в спектре магнонов приводит к экспоненциальной зависимости $C_{\text{маг}}$ и $M_{\text{маг}}$ от T в области еще более низких температур. При $T \ll \beta KM$

$$C_{\text{маг}},\ M_{\text{маг}} \sim \exp(-2\beta KM/T). \qquad (71,8)$$

Величина, стоящая в числителе экспоненты,— наименьшее значение энергетической щели, достигаемое при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (см. также задачу 1).

---

[1] Для типичного значения $M = 2\cdot 10^3$ гс это условие дает $T \gg 1$ K.

[2] О вычислении интегралов такого типа см. V § 58.

Если спонтанная намагниченность ферромагнетика в основном состоянии равна наибольшему возможному (как говорят, номинальному) значению, отвечающему параллельности всех атомных моментов в теле, то это значение уже не изменится при наложении (в том же направлении) внешнего магнитного поля, т. е. восприимчивость χ в этом направлении равна нулю.

Учет релятивистских взаимодействий уменьшает спонтанную намагниченность (при $T=0$) по сравнению с ее «обменным» значением и приводит к появлению отличной от нуля восприимчивости (*T. Holstein, H. Primakoff*, 1940). Хотя этот эффект и очень мал, его вычисление представляет принципиальный интерес.

При вычислении выше магнитной части термодинамических величин мы опустили нулевую энергию «магнитных осцилляторов», не дающую вклада в температурную зависимость этих величин. Нулевая энергия отвечает числам заполнения магнонных состояний, равным 1/2:

$$E(0)_{\text{маг}} = \int \frac{1}{2}\,\varepsilon(\mathbf{k})\,\frac{V\,d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Соответственно для «нулевой» намагниченности имеем

$$M(0) = -\int \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathfrak{H}}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (71,9)$$

Этот интеграл расходится при больших k, т. е. он определяется главным образом коротковолновыми магнонами ($ka \sim 1$), которые вообще нельзя рассматривать макроскопически. Однако изменение намагниченности под влиянием релятивистских эффектов определяется, как мы увидим, длинноволновой областью спектра магнонов и может быть вычислено с помощью полученных в § 70 формул.

Для простоты будем рассматривать кубический кристалл и пренебрежем малой в этом случае константой анизотропии, т. е. будем писать спектр магнонов (70,10) в виде

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta\left[(bk^2+\mathfrak{H})(bk^2+\mathfrak{H}+4\pi M\sin^2\theta)\right]^{1/2}, \qquad (71,10)$$

где $b=\alpha M$; релятивистским эффектам отвечает в этом выражении член $4\pi M\sin^2\theta$, возникающий от учета магнитостатической энергии. Искомое изменение δM намагниченности под влиянием релятивистских эффектов получается вычитанием из (71,9) такого же интеграла с $\varepsilon_{\text{об}}(\mathbf{k}) = 2\beta bk^2 + 2\beta\mathfrak{H}$ вместо $\varepsilon(\mathbf{k})$:

$$\delta M = -\frac{1}{2}\int \frac{\partial}{\partial\mathfrak{H}}\left[\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\text{об}}(\mathbf{k})\right]\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (71,11)$$

Этот интеграл уже сходится при больших $\mathbf{k}$ [1]).

[1]) Во избежание недоразумений отметим, что поправку к энергии основного состояния этим способом определить нельзя: без дифференцирования по $\mathfrak{H}$ интеграл от $\varepsilon-\varepsilon_{\text{об}}$ расходится при использовании длинноволновых выражений для спектра магнонов.

Для вычисления удобно сначала продифференцировать его по M при постоянном b (для этого и введено обозначение b в (71,10)). После простых преобразований получим

$$\frac{\partial \delta M}{\partial M}=-\frac{4\pi^2\beta M}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4\theta\cdot 2\pi k^2\,dk\cdot\sin\theta\,d\theta}{(bk^2+\mathfrak{H})^{1/2}\,(bk^2+\mathfrak{H}+4\pi M\sin^2\theta)^{3/2}}.$$

Ввиду сходимости интегрирование по dk можно распространить до ∞.

При $\mathfrak{H}=0$ интеграл легко вычисляется; интегрируя затем по M, получим

$$\delta M=-\frac{\sqrt{\pi}\beta}{8\alpha^{3/2}}. \qquad (71,12)$$

Эта величина очень мала: $\delta M/M\sim 10^{-6}$.

Если же внешнее поле велико ($\mathfrak{H}\gg 4\pi M$), можно пренебречь членом $4\pi M\sin^2\theta$ в знаменателе подынтегрального выражения. После этого вычисление приводит к результату

$$\delta M=-\frac{2\pi\beta M^{1/2}}{15\alpha^{3/2}\mathfrak{H}^{1/2}}. \qquad (71,13)$$

При $\mathfrak{H}\to\infty$ δM стремится, как и следовало, к нулю.

В заключение отметим, что если бы мы попытались тем же способом, который был применен в этом параграфе к трехмерному случаю, рассмотреть температурную зависимость намагниченности двумерного ферромагнетика, то (в чисто обменном приближении) мы получили бы вместо (71,6) логарифмически расходящийся интеграл. Это означает, что спонтанное намагничение в двумерной системе с обменным взаимодействием в действительности отсутствует при всех $T\neq 0$. Эта ситуация аналогична той, которая была отмечена в § 27 для двумерной бозе-жидкости (и в V § 137 — для двумерного кристалла). Независимость энергии системы от направления магнитного момента приводит к тому, что в ее выражение входят только производные вектора **M**; в свою очередь, это приводит, в конечном итоге, к расходимости флуктуаций (в двумерном случае), разрушающих намагничение. Учет релятивистских взаимодействий, зависящих от направления **M**, стабилизирует флуктуации и делает возможным существование двумерного ферромагнетика.

Задачи

1. Вычислить магнонные части термодинамических величин при температурах $T\ll\varepsilon(0)$.

Решение. Существенны магноны с малыми квазиимпульсами **k**, распространяющиеся в направлении, где щель минимальна, т. е. вблизи $\theta=0$ и $\theta=\pi$; оба эти значения дают одинаковый вклад. Например, при малых θ

имеем, с требуемой точностью,

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = 2\beta KM + Ak^2 + 4\pi\beta M\theta^2,$$

где $A = 2\beta M\alpha$ для кубических кристаллов или $A = 2\beta M\alpha_2$ для одноосных кристаллов типа «легкая ось». Распределение магнонов при рассматриваемых температурах можно считать больцмановским (т. е. можно пренебречь единицей в знаменателях подынтегральных выражений) и заменить везде в предэкспоненциальных множителях $\varepsilon(\mathbf{k})$ на $\varepsilon(0)$. Интегрирование по k и по θ распространяется до ∞, и в результате находим

$$E_{\text{маг}} = V\frac{KT^{5/2}}{32\pi^{5/2}A^{3/2}}\exp\left(-\frac{2\beta KM}{T}\right), \quad M_{\text{маг}} = -\frac{E_{\text{маг}}}{VKM}.$$

При вычислении теплоемкости следует дифференцировать только экспоненциальный множитель

$$C_{\text{маг}} = 2\beta KMT^{-2}E_{\text{маг}}.$$

2. Определить зависимость намагниченности от внешнего поля при условиях $\mathfrak{H} \gg 4\pi M$, $T \gg \beta\mathfrak{H}$.

Решение. В указанных условиях можно пренебречь релятивистскими членами и писать $\varepsilon(\mathbf{k})$ в виде (70,11). Продифференцировав выражение (71,4), находим

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{4\beta^2}{T}\int \frac{e^{\varepsilon/T}}{(e^{\varepsilon/T}-1)^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

В интеграле существенны малые $\mathbf{k}$. Поэтому

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} \approx 4\beta^2 T\int \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{T}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{(\alpha k^2 M_0 + \mathfrak{H})^2}$$

(полагаем $\alpha = \text{const}$; M_0 — значение M при $\mathfrak{H} = 0$) и окончательно

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{T}{8\pi(\alpha M_0)^{3/2}\mathfrak{H}^{1/2}}.$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях $M - M_0 \sim \mathfrak{H}^{1/2}$.

3. Определить зависимость намагниченности при $T = 0$ от внешнего поля в слабых полях.

Решение. Дифференцируя интеграл (71,11) с $\varepsilon(\mathbf{k})$ из (71,10) по $\mathfrak{H}$, получим

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} = \int \frac{4\pi^2\beta M_0^2\sin^4\theta}{[(\alpha M_0 k^2 + 4\pi M_0\sin^2\theta + \mathfrak{H})(\alpha M_0 k^2 + \mathfrak{H})]^{3/2}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

При $\mathfrak{H} \to 0$ интеграл по dk расходится логарифмически при малых k. Поэтому, ограничиваясь логарифмической точностью, можно положить в первом множителе в знаменателе $k = 0$, $\mathfrak{H} = 0$, а во втором $\mathfrak{H} = 0$, но при этом обрезать интеграл снизу при $k^2 \sim \mathfrak{H}/\alpha M_0$ и сверху — при $k^2 \sim 4\pi/\alpha$. В результате получим

$$\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{H}} = \frac{\beta}{32\sqrt{\pi}M_0\alpha^{3/2}}\ln\frac{4\pi M_0}{\mathfrak{H}}.$$

Напомним, что в (71,10) пренебрежено K. При $\mathfrak{H} \ll KM$ в логарифме $\mathfrak{H}$ заменяется на KM_0.

4. В обменном приближении определить пространственную корреляционную функцию флуктуаций намагниченности на расстояниях $r \gg a$.

Решение. Операторы $\hat{m}_x$ и $\hat{m}_y$, удовлетворяющие правилу коммутации (70,6) и выраженные через операторы уничтожения и рождения магнонов, имеют вид (в шредингеровском представлении)

$$\hat{m}_x(\mathbf{r}) = (\beta M/V)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+} e^{-i\mathbf{kr}}),$$

$$\hat{m}_y(\mathbf{r}) = i(\beta M/V)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+} e^{-i\mathbf{kr}}).$$

С помощью этих операторов вычисляем корреляционную функцию

$$\varphi_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \langle \hat{m}_i(\mathbf{r}_1)\hat{m}_k(\mathbf{r}_2) + \hat{m}_k(\mathbf{r}_2)\hat{m}_i(\mathbf{r}_1) \rangle, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

(индексы i, k пробегают значения x, y). Учтя, что отличные от нуля диагональные матричные элементы имеют только произведения $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+} \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle = n_{\mathbf{k}}$, $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+} \rangle = n_{\mathbf{k}} + 1$ (где $n_{\mathbf{k}}$ — числа заполнения состояний магнонов), находим

$$\varphi_{ik}(\mathbf{r}) = \delta_{ik} \int 2\beta M \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Подынтегральное выражение прямо дает фурье-компоненту корреляционной функции. Постоянный член в ней можно опустить: ему соответствует δ-функционное слагаемое в $\varphi_{ik}(\mathbf{r})$, между тем, как все рассмотрение относится лишь к расстояниям $r \gg a$. Таким образом,

$$\varphi_{ik}(\mathbf{k}) = 2\beta M n_{\mathbf{k}} \delta_{ik} = 2\beta M \left[e^{\varepsilon(\mathbf{k})/T} - 1\right]^{-1} \delta_{ik}.$$

В классическом пределе, при $\varepsilon \ll T$, находим

$$\varphi_{ik}(\mathbf{k}) = \delta_{ik} T/2\alpha k^2.$$

В кубическом ферромагнетике $\alpha = \mathrm{const}$, и тогда

$$\varphi_{ik}(\mathbf{r}) = \delta_{ik} T/8\pi\alpha r, \quad r \gg (\beta M \alpha/T)^{1/2}.$$

§ 72. Спиновый гамильтониан

Для получения закона дисперсии магнонов во всем интервале изменения квазиимпульса (а не только в длинноволновом пределе) необходимо, разумеется, использовать более детальные представления о микроскопической структуре ферромагнетика.

Рассмотрим диэлектрик, состоящий из атомов с равным нулю орбитальным моментом, но отличным от нуля спином S. Если не интересоваться высоко возбужденными состояниями, связанными с возбуждением электронных оболочек атомов, можно усреднить гамильтониан системы по орбитальным переменным электронов атомов в основном состоянии (и при закрепленных в узлах решетки атомных ядрах). В результате мы получим спиновый гамильтониан системы, содержащий лишь операторы полных спинов атомов[1]).

Если учитывать только обменное взаимодействие, зависящее лишь от относительных ориентаций спинов, то операторы векторов спинов атомов могут входить в гамильтониан лишь в виде

[1]) Такая процедура аналогична тому, как строятся гамильтонианы отдельных атомов, описывающие тонкую структуру их уровней — ср. III § 72.