**Задачи**

1. Найти магнитную часть теплоемкости системы, описывающейся гамильтонианом (72,1), при температурах $T \gg J$.

Решение. Первый член разложения теплоемкости по степеням $1/T$ возникает от члена $-\overline{E^2}/2T$ в свободной энергии (72,16). Усредняя тем же способом квадрат гамильтониана (72,1), получим

$$\overline{E^2} = \frac{1}{4} 2 \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{n}} J^2_{\mathbf{mn}} \overline{S_{\mathbf{m}i} S_{\mathbf{m}k}}\, \overline{S_{\mathbf{n}i} S_{\mathbf{n}k}} = 3 \frac{S^2 (S+1)^2}{9} \frac{N}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} J^2_{\mathbf{q}}$$

(так как $\overline{S_i S_k} = S(S+1)\delta_{ik}/3$). Для теплоемкости находим в результате

$$C_{\text{маг}} = \frac{NS^2 (S+1)^2}{6T^2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} J^2_{\mathbf{q}}$$

в соответствии с V (73,4).

2. Пренебрегая взаимодействием между спинами, вычислить намагниченность парамагнетика при произвольном соотношении между $\beta\mathfrak{H}$ и $T$.

Решение. Статистическая сумма (для одного спина в поле)

$$Z = \sum_{S_z = -S}^{S} \exp\left(-\frac{2\beta\mathfrak{H}}{T} S_z\right) = \frac{\operatorname{sh}[2\beta\mathfrak{H}(S + {}^1/_2)/T]}{\operatorname{sh}(\beta\mathfrak{H}/T)}.$$

Вычисляя свободную энергию и дифференцируя ее по $\mathfrak{H}$, находим намагниченность

$$M = \frac{N}{V} T \frac{\partial}{\partial \mathfrak{H}} \ln Z = \frac{2\beta N}{V} \left\{ \left(S + \frac{1}{2}\right) \operatorname{cth} \frac{2\beta\mathfrak{H}(S + {}^1/_2)}{T} - \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\beta\mathfrak{H}}{T} \right\}$$

(*L. Brillouin*, 1927). При $\beta\mathfrak{H} \ll T$ это выражение переходит в (72,15). В обратном пределе, при $\beta\mathfrak{H} \gg T$, намагниченность стремится к своему номинальному значению по закону

$$M = \frac{2\beta N}{V} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{4\beta\mathfrak{H}}{T}\right) \right\}.$$

## § 73. Взаимодействие магнонов

Существенный методический интерес представляет вопрос о вкладе в магнитную часть термодинамических величин ферромагнетика, происходящем от взаимодействия магнонов; напомним, что вычисления в § 71 были основаны на представлении об идеальном газе невзаимодействующих магнонов. Рассмотрим этот вопрос для системы, описываемой обменным спиновым гамильтонианом (72,1).

Имея в виду нахождение вклада только наиболее низкого порядка по малому отношению $T/T_c$, мы можем ограничиться лишь парным взаимодействием магнонов. Это значит, что надо рассмотреть двухмагнонные состояния системы, в которых проекция полного спина равна $NS-2$.

Такой проекции отвечают волновые функции

$$\chi_{nn}=[4S(2S-1)]^{-1/2}\hat{S}_{n-}\hat{S}_{n-}\chi_0,$$
$$\chi_{mn}=(2S)^{-1}\hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\chi_0,\qquad m\neq n; \tag{73,1}$$

поскольку операторы спина различных атомов коммутативны, то $\chi_{mn}=\chi_{nm}$[1]. Функции (73,1) нормированы условием $\chi^*_{mn}\chi_{mn}=1$, в чем легко убедиться, раскрывая произведение таким же образом, как это было сделано для проверки нормировки в (72,9). Тем же способом можно убедиться и во взаимной ортогональности различных функций $\chi_{mn}$.

Функции (73,1) не являются сами по себе собственными функциями гамильтониана. Волновые же функции двухмагнонных стационарных состояний системы должны представлять собой определенные линейные комбинации функций $\chi_{mn}$, которые запишем в виде

$$\chi=\sum_{m\neq n}\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{mn}\chi_{mn}+\sum_{n}\psi_{nn}\chi_{nn} \tag{73,2}$$

(поскольку $\chi_{mn}$ и $\chi_{nm}$ — одно и то же, то надо полагать и $\psi_{mn}\equiv\psi_{nm}$). Совокупность коэффициентов $\psi_{mn}$ составляет волновую функцию в представлении, в котором независимыми переменными являются номера атомов в решетке. Множитель $1/\sqrt{2}$ в первой сумме в (73,2) введен для того, чтобы квадрат модуля $|\chi|^2$ был равен сумме $\Sigma|\psi_{mn}|^2$, в которой каждая из различных $\psi_{mn}$ встречалась бы лишь один раз.

Тем же способом, которым было найдено уравнение (72,11) для волновых функций одномагнонных стационарных состояний, найдем, что функции (73,2) должны удовлетворять аналогичному уравнению

$$\mathscr{E}\chi=\sum_{m\neq n}\frac{\psi_{mn}}{2^{3/2}S}\{\hat{H},\ \hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\}\chi_0+$$
$$+\sum_{n}\frac{\psi_{nn}}{2[S(2S-1)]^{1/2}}\{\hat{H},\ \hat{S}_{n-}\hat{S}_{n-}\}\chi_0, \tag{73,3}$$

где теперь $\mathscr{E}=E-E_0$ — энергия двух взаимодействующих друг с другом магнонов (а скобки $\{\ldots\}$ означают коммутатор).

Раскроем коммутаторы в правой стороне уравнения (73,3). Для этого замечаем, что

$$\{\hat{H},\ \hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\}\equiv\{\hat{H},\ \hat{S}_{m-}\}\hat{S}_{n-}+\hat{S}_{m-}\{\hat{H},\ \hat{S}_{n-}\},$$

---

[1]) Если спин $S=1/2$, то двукратное применение одного и того же оператора $\hat{S}_{n-}$ к функции основного состояния $\chi_0$ обращает ее в нуль. В этом случае, следовательно, все «диагональные» функции $\chi_{nn}\equiv 0$.

и используем выражения (72,12) для коммутаторов $\{\hat{H}, \hat{S}_{n-}\}$. После этого с учетом правил коммутации (72,4) переставляем операторы $\hat{S}_z$ в крайнее правое положение, где они, воздействуя на функцию $\chi_0$, умножают ее на $S$. В результате получим

$$\{\hat{H}, \hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\}\chi_0 = S\sum_{l}[J_{ml}(\hat{S}_{m-} - \hat{S}_{l-})\hat{S}_{n-} + J_{nl}(\hat{S}_{n-} - \hat{S}_{l-})\hat{S}_{m-}]\chi_0 + \delta_{mn}\sum_{l} J_{nl}\hat{S}_{n-}\hat{S}_{l-}\chi_0 - J_{mn}\hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\chi_0 + 4\beta\mathfrak{H}\hat{S}_{m-}\hat{S}_{n-}\chi_0; \qquad (73,4)$$

для упрощения записи формул ограничения, налагаемые на индексы суммирования, не выписываются — суммирования производятся по всем значениям $\mathbf{l}$, по при этом подразумевается, что все «диагональные» $J_{ll} = 0$.

Дальнейшая процедура сводится к подстановке (73,4) в уравнение (73,3) и приравниванию коэффициентов, стоящих при одинаковых функциях $\chi_{mn}$ в обоих сторонах равенства. Вычисления элементарны, хотя и довольно громоздки. Они приводят в результате к следующей системе уравнений для величин $\psi_{mn}$:

$$(2JS - \mathscr{E})\psi_{mn} = S\sum_{l}(J_{lm}\psi_{ln} + J_{ln}\psi_{lm}) + J_{mn}\psi_{mn} - A_S\left[J_{mn}(\psi_{mm} + \psi_{nn}) + 2\delta_{mn}\sum_{l} J_{lm}\psi_{lm}\right], \qquad (73,5)$$

где

$$A_S = S\left[1 - \left(\frac{2S-1}{2S}\right)^{1/2}\right]$$

и введено обозначение $J$ для суммы $\sum\limits_{l} J_{nl}$, не зависящей, очевидно, от индекса $\mathbf{n}$[1]).

Перейдем в этом уравнении от координатного представления (независимые переменные — координаты атомов $\mathbf{r}_n$, $\mathbf{r}_m$) к импульсному, т. е. положим

$$\psi_{mn} = \frac{1}{N} e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}_m + \mathbf{r}_n)/2}\sum_{\mathbf{k}}\psi(\mathbf{K}, \mathbf{k})e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)}. \qquad (73,6)$$

Вектор $\mathbf{K}$ играет роль суммарного квазиимпульса двух магнонов, а $\mathbf{k}$ — квазиимпульса их относительного движения; суммирование производится по $N$ дискретным значениям $\mathbf{k}$, допускаемым для решетки объема $Nv$ ($N$ — число атомов в решетке, $v$ —

[1]) Эти уравнения справедливы и в случае спина $S = 1/2$, когда все $\psi_{nn}$ произвольны. Обратим внимание на то, что при $S = 1/2$ все «диагональные» величины $\psi_{nn}$ вообще выпадают из уравнений с $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$. Уравнения же с $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ в этом случае надо просто считать отсутствующими.

объем ее элементарной ячейки). Вместе с $\psi_{mn}$ надо представить в виде ряда Фурье также и обменные интегралы:

$$J_{mn}=\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_n)}J(\mathbf{k}),\quad J(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{n}} J_{0n}e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_n)} \tag{73,7}$$

(поскольку $J_{mn}=J_{nm}$, то $J(\mathbf{k})=J(-\mathbf{k})$).

Опустив простые промежуточные выкладки, приведем сразу окончательный результат преобразования уравнения (73,5):

$$\left[\varepsilon\left(\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}\right)+\varepsilon\left(\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}\right)-\mathscr{E}\right]\psi(\mathbf{K},\mathbf{k})+ \\ +\int U(\mathbf{K},\mathbf{k},\mathbf{k}')\psi(\mathbf{K},\mathbf{k}')\frac{V\,d^3k'}{(2\pi)^3}=0, \tag{73,8}$$

где

$$NU(\mathbf{K},\mathbf{k},\mathbf{k}')=A_S\left[J\left(\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}\right)+J\left(\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}\right)+J\left(\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}'\right)+ \\ +J\left(\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}'\right)\right]-\frac{1}{2}\left[J(\mathbf{k}-\mathbf{k}')+J(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\right], \tag{73,9}$$

а $\varepsilon(\mathbf{k})$ — энергия одного магнона, определяемая формулой (72,13); суммирование по $\mathbf{k}'$ заменено интегрированием по одной ячейке обратной решетки.

Таким образом, точная (в рамках гамильтониана (72,1)) задача о двухмагнонных состояниях системы сводится к решению уравнения, вполне аналогичного уравнению Шредингера для системы двух частиц в импульсном представлении (ср. III (130,4)). При этом функции $\varepsilon(\mathbf{k})$ играют роль кинетических энергий частиц, а ядро интегрального уравнения $U(\mathbf{K},\mathbf{k},\mathbf{k}')$ — роль матричного элемента энергии $U$ их взаимодействия для перехода (рассеяния) из состояний с импульсами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ в состояния с импульсами $\mathbf{k}_1'$, $\mathbf{k}_2'$, где

$$\mathbf{k}_1=\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k},\quad \mathbf{k}_2=\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k},\quad \mathbf{k}_1'=\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}',\quad \mathbf{k}_2'=\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}'.$$

В этом смысле $U(\mathbf{K},\mathbf{k},\mathbf{k}')$ целесообразно записать в виде

$$NU(\mathbf{k}_1',\mathbf{k}_2';\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)=A_S\left[J(\mathbf{k}_1)+J(\mathbf{k}_2)+J(\mathbf{k}_1')+J(\mathbf{k}_2')\right]- \\ -\frac{1}{2}\left[J(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')+J(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2')\right]. \tag{73,10}$$

В общем случае уравнение (73,8—9) очень сложно. Мы ограничимся вычислением поправки к термодинамическим величинам в предположении $S\gg 1$. Простота этого случая связана с тем, что энергия магнонов $\varepsilon(\mathbf{k})$ пропорциональна $S$, а их взаимодействие $U$ не зависит от $S$ (при $S\gg 1$ коэффициент в (73,9) $A_S\approx 1/4$). Поэтому $U$ можно рассматривать как малое возмущение. Тогда поправка $\Omega_{вз}$ (от взаимодействия магнонов) к термодинамическому потенциалу $\Omega$ будет даваться просто средним значением $U$. Взяв «диагональный матричный элемент»

$$U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{2N}[J(\mathbf{k}_1) + J(\mathbf{k}_2) - J(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - J(0)], \quad (73,11)$$

мы тем самым усредняем по состоянию с заданными квазиимпульсами магнонов. После этого статистическое усреднение по равновесному распределению магнонов осуществляется интегрированием

$$\Omega_{\text{вз}} = \int n(\mathbf{k}_1) n(\mathbf{k}_2) U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \frac{V^2 d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6}, \quad (73,12)$$

где $n(\mathbf{k}) = [\exp(\varepsilon(\mathbf{k})/T) - 1]^{-1}$ — функция распределения Бозе.

При низких температурах интеграл определяется областью малых значений $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, соответственно чему следует разложить все $\varepsilon(\mathbf{k})$ и $J(\mathbf{k})$ по степеням $\mathbf{k}$. Тогда $\varepsilon(\mathbf{k})$ дается квадратичным выражением (72,14). Поскольку $J(\mathbf{k})$ — четная функция $\mathbf{k}$, то квадратичны также и первые члены ее разложения:

$$J(\mathbf{k}) \approx J(0) + a_{ik} k_i k_k.$$

Тогда

$$U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{N} a_{ik} k_{1i} k_{2k}.$$

Но при подстановке этого выражения, нечетного по $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, в (73,12) интеграл обращается в нуль в результате усреднения по направлениям $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$.

Поэтому в разложении $J(\mathbf{k})$ надо учесть члены четвертого порядка, в результате чего в интеграле (73,12) функция $U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ оказывается формой четвертой степени, причем отличный от нуля вклад в интеграл дают члены этой формы, квадратичные по $\mathbf{k}_1$ и по $\mathbf{k}_2$. Ввиду быстрой сходимости интегрирование может быть распространено по всему $\mathbf{k}$-пространству. Заменой переменных $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\sqrt{T}$ убеждаемся тогда, что зависимость $\Omega_{\text{вз}}$ от $T$ и $\mathfrak{H}$ имеет вид

$$\Omega_{\text{вз}} = VT^5 f(\mathfrak{H}/T), \quad (73,13)$$

причем $f(0)$ и $f'(0)$ конечны. Отсюда следует, что поправочный член в намагниченности

$$M_{\text{вз}} = -\frac{1}{V} \frac{\partial \Omega_{\text{вз}}}{\partial \mathfrak{H}}\bigg|_{\mathfrak{H}=0} = \text{const} \cdot T^4. \quad (73,14)$$

Такому же закону следует поправочный член в теплоемкости[1]).

[1]) Эти результаты (в общем случае произвольного спина) были впервые получены *Дайсоном* (*F. Dyson*, 1956). В изложенном выводе уравнения (73,5) мы следовали в основном *Бойду* и *Каллавэю* (*R. J. Boyd*, *J. Callaway*, 1965).

Мы видим, что взаимодействие магнонов приводит к поправкам в термодинамических величинах лишь в высоком приближении по $T/T_c$. Напомним, что основные члены в намагниченности и в магнитной части теплоемкости следуют закону $T^{3/2}$. Между этими членами и поправками от $\Omega_{вз}$ существуют еще члены, пропорциональные $T^{5/2}$ и $T^{7/2}$, происходящие от следующих членов разложения энергии магнонов $\varepsilon(\mathbf{k})$ по степеням $\mathbf{k}^2$.

С помощью полученных уравнений можно рассмотреть также вопрос о связанных состояниях двух магнонов. Эти состояния проявляются как дискретные (при заданном $\mathbf{K}$) собственные значения уравнения (73,8). Как функции переменной $\mathbf{K}$, эти собственные значения $\mathscr{E}(\mathbf{K})$ представляют собой новые ветви элементарных возбуждений в системе. Исследование показывает, однако, что эти состояния существуют только при достаточно больших значениях $K$; поэтому они во всяком случае не влияют на термодинамические величины ферромагнетика при низких температурах[1]).

**Задача**

В предположении $S \gg 1$ найти поправочные члены от взаимодействия магнонов в намагниченности и теплоемкости для кубической решетки, в которой обменные интегралы отличны от нуля только для соседних (вдоль кубических осей) пар атомов.

Решение. Каждый атом имеет шесть ближайших соседних атомов. По определению (73,7), находим

$$J(\mathbf{k}) = 2J_0 (\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a),$$

где $J_0$ — обменный интеграл для пары соседних атомов, а $a$ — длина ребра кубической ячейки. При малых $\mathbf{k}$

$$J(\mathbf{k}) \approx J_0 \left[2 - a^2k^2 + \frac{a^4}{12}(k_x^4 + k_y^4 + k_z^4)\right].$$

Отсюда

$$U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -\frac{a^7 J_0}{4V}(k_{1x}^2 k_{2x}^2 + k_{1y}^2 k_{2y}^2 + k_{1z}^2 k_{2z}^2)$$

(опущены члены, нечетные по $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$). Энергия магнона (согласно (72,14))

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = SJ_0 a^2 k^2 + 2\beta\mathfrak{H}.$$

Вычисление интеграла (73,12) приводит к следующим результатам:

$$\frac{M_{вз}}{M} = -\frac{3\pi\zeta(^3/_2)\,\zeta(^5/_2)}{2S^2}\left(\frac{T}{4\pi SJ_0}\right)^4, \quad C_{вз} = \frac{15\pi\zeta^2(^5/_2)\,N}{S}\left(\frac{T}{4\pi SJ_0}\right)^4$$

($\zeta$ — дзета-функция).

---

[1]) См. *M. Wortis*, Phys. Rev. **132**, 85 (1963). Речь идет о трехмерной решетке. В двух- и одномерном случаях связанные состояния магнонов существуют при всех значениях **k**.