ГЛАВА VIII

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ

§ 75. Гриновская функция фотона в среде

Приступая к изучению статистических свойств электромагнитного поля в материальных средах, напомним прежде всего, в чем заключается смысл усреднений, которым подвергаются электромагнитные величины в макроскопической электродинамике.

Если исходить, для наглядности, из классической точки зрения, то можно различать усреднение по физически бесконечно малому объему при заданном расположении всех частиц в нем и затем усреднение полученной величины по движению частиц. В уравнения Максвелла макроскопической электродинамики входят полностью усредненные величины. При рассмотрении же флуктуаций поля речь идет о колебаниях со временем величин, усредненных лишь по физически бесконечно малым объемам.

С квантовомеханической точки зрения говорить об усреднении по объему можно, разумеется, не для самой физической величины, а лишь для ее оператора; второй же шаг заключается в определении среднего значения этого оператора с помощью квантовомеханических вероятностей. Фигурирующие ниже в этой главе операторы поля будут пониматься как усредненные только в первом смысле.

Статистические свойства электромагнитного излучения в материальной среде описываются гриновской функцией фотона в среде. Для фотонов роль ψ-операторов играют операторы потенциалов электромагнитного поля. Фотонные функции Грина определяются через эти операторы таким же образом, как они определяются для частиц через ψ-операторы.

Потенциалы поля составляют 4-вектор $A^{\mu}=(A^0, \mathbf{A})$, где $A^0 \equiv \varphi$ скалярный, а $\mathbf{A}$ — векторный потенциалы. Выбор этих потенциалов в классической электродинамике неоднозначен: они допускают так называемое калибровочное преобразование, никак не отражающееся ни на каких наблюдаемых величинах (см. II § 18). Соответственно в квантовой электродинамике такая же неоднозначность имеет место в выборе операторов поля, а с ними — и в определении гриновских функций фотона. Мы будем пользоваться калибровкой, в которой скалярный потенциал равен нулю:

$$A^0 \equiv \varphi = 0, \tag{75,1}$$

так что поле определяется одним лишь векторным потенциалом. Такая калибровка обычно оказывается удобной для задач, в которых речь идет о взаимодействии электромагнитного поля с нерелятивистскими частицами,—как это и имеет место для поля в обычных материальных средах.

В этой калибровке функция Грина представляет собой трехмерный тензор второго ранга

$$D_{ik}(X_1, X_2) = -i \langle \mathrm{T}\hat{A}_i(X_1)\,\hat{A}_k(X_2)\rangle \tag{75,2}$$

(i, $k = x$, y, z—трехмерные векторные индексы), где угловые скобки обозначают (как и в (36,1)) усреднение по распределению Гиббса для системы, состоящей из среды вместе с находящимся с ней в равновесии излучением; поскольку фотоны являются бозонами, то перестановка операторов $\hat{A}_i$, $\hat{A}_k$ при их хронологизации не сопровождается изменением знака произведения. Напомним также, что операторы $\hat{A}_i$—самосопряженные (чем выражается истинная нейтральность фотона); поэтому в (75,2) не делается различия между $\hat{A}_i$ и $\hat{A}_i^+$[1]).

В качестве первичного понятия для построения всех видов фотонных гриновских функций следует, однако, пользоваться не (75,2), а запаздывающей функцией Грина, определенной согласно

$$iD^R_{ik}(X_1, X_2) = \begin{cases} \langle \hat{A}_i(X_1)\,\hat{A}_k(X_2) - \hat{A}_k(X_2)\,\hat{A}_i(X_1)\rangle, & t_1 > t_2, \\ 0, & t_1 < t_2 \end{cases} \tag{75,3}$$

(знак минус между двумя членами в угловых скобках отвечает определению (36,9) для статистики Бозе).

Для замкнутой системы функция Грина зависит от моментов времени t_1, t_2 только через их разность $t = t_1 - t_2$. Что же касается координат $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, то в общем случае неоднородной среды они входят в функцию независимо друг от друга: $D^R_{ik}(t;\ \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Соответственно фурье-разложению эта функция будет подвер-

---

[1]) В общем случае произвольной калибровки потенциалов фотонная функция Грина является 4-тензором $D_{\mu\nu}$ (в калибровке же (75,1): $D_{00} = 0$, $D_{0i} = 0$). Общие тензорные и калибровочные свойства фотонной функции Грина в статистике—такие же, как и в квантовой электродинамике поля в вакууме. Отметим, что определение (75,2) отличается знаком от принятого в IV. Оно выбрано здесь единообразно с определением гриновских функций других бозонов (в том числе фононов).

гаться только по времени; компонента этого разложения

$$D_{ik}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) = \int_0^\infty e^{i\omega t} D_{ik}^R(t;\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)\,dt. \tag{75,4}$$

Рассматривая величины, усредненные по физически бесконечно малым объемам, мы тем самым ограничиваем себя рассмотрением лишь длинноволновой части излучения, в которой волновые векторы фотонов удовлетворяют условию

$$ka \ll 1 \tag{75,5}$$

(a — межатомные расстояния в. среде). В этой области частот гриновская функция фотона может быть выражена через другие макроскопические характеристики среды — ее диэлектрическую и магнитную проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

Для этого запишем оператор взаимодействия электромагнитного поля со средой:

$$\hat{V} = -\frac{1}{c}\int \hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{A}}\,d^3x, \tag{75,6}$$

где $\hat{\mathbf{j}}$ — оператор плотности электрического тока, создаваемого частицами среды[1]). Если же в среду внести некоторый классический «сторонний» ток $\mathbf{j}(t,\ \mathbf{r})$, то с ним будет связан оператор взаимодействия

$$\hat{V} = -\frac{1}{c}\int \mathbf{j}(t,\ \mathbf{r})\,\hat{\mathbf{A}}\,d^3x. \tag{75,7}$$

Это выражение позволяет установить связь с общей теорией отклика макроскопической системы на внешнее воздействие.

Напомним, что в этой теории (см. V § 125) фигурировал дискретный ряд величин x_a $(a = 1, 2, \ldots)$, характеризующих поведение системы под действием определенных внешних воздействий. Эти воздействия описываются «возмущающими силами» $f_a(t)$ такими, что оператор энергии взаимодействия имеет вид

$$\hat{V} = -\sum_a f_a \hat{x}_a,$$

---

[1]) См. IV § 53 (в IV ток обозначается как $e\mathbf{j}$, т. е. элементарный заряд e выносился из определения $\mathbf{j}$). Оператор (75,6) подразумевает использование релятивистского выражения для оператора тока. В нерелятивистских задачах можно пренебречь в ψ-операторах (из которых строится оператор тока $\hat{\mathbf{j}}$) частями, связанными с отрицательными частотами, т. е. с античастицами. Это означает, в частности, пренебрежение радиационными поправками, которые изменяют фотонную функцию Грина в вакууме за счет виртуального рождения электронно-позитронных пар. Эти поправки пренебрежимо малы при длинах волн $\lambda \gg \hbar/mc$ — условие, заведомо выполненное в области (75,5).

где $\hat{x}_a$—операторы величин x_a. Средние значения $\overline{x}_a(t)$, устанавливающиеся под действием возмущения, являются линейными функционалами сил $f_a(t)$. Для фурье-компонент всех величин эта связь записывается в виде

$$\overline{x}_{a\omega}=\sum_b \alpha_{ab}(\omega) f_{b\omega}$$

(предполагается, что в отсутствие возмущения $\overline{x}_a=0$). Коэффициенты α_{ab} в этих соотношениях называют *обобщенными восприимчивостями* системы. Если обе величины x_a и x_b ведут себя одинаково по отношению к обращению времени, а тело *не магнитоактивно* (не обладает магнитной структурой и не находится в магнитном поле), то величины α_{ab} симметричны по своим индексам.

Здесь нам придется иметь дело с величинами f_a и x_a, имеющими распределенный характер—функциями координат $\mathbf{r}$ точки тела. В таком случае выражение $\hat{V}$ надо писать в виде

$$\hat{V}=-\sum_a \int f_a(t, \mathbf{r})\, \hat{x}_a(t, \mathbf{r})\, d^3x, \tag{75,8}$$

а соотношение между средними значениями $\overline{x}_a$ и силами f_a—как

$$\overline{x}_{a\omega}(\mathbf{r})=\sum_b \int \alpha_{ab}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') f_{b\omega}(\mathbf{r}')\, d^3x'. \tag{75,9}$$

Обобщенные восприимчивости становятся теперь функциями координат двух точек в теле, а их симметрия выражается равенством

$$\alpha_{ab}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')=\alpha_{ba}(\omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}). \tag{75,10}$$

Согласно формуле Кубо (см. V (126,9)), восприимчивости выражаются через средние значения коммутаторов гейзенберговских операторов $\hat{x}_a(t, \mathbf{r})$:

$$\alpha_{ab}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')=$$
$$=\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty e^{i\omega t}\langle \hat{x}_a(t, \mathbf{r})\,\hat{x}_b(0, \mathbf{r}')-\hat{x}_b(0,\mathbf{r}')\,\hat{x}_a(t, \mathbf{r})\rangle\, dt. \tag{75,11}$$

Будем рассматривать теперь в качестве «сил» f_a компоненты вектора тока $\mathbf{j}$. Тогда из сравнения (75,7) с (75,8) видно, что отвечающими им величинами x_a будут компоненты векторного потенциала поля $\mathbf{A}/c$. Сравнение же формулы (75,11) с определением (75,3—4) показывает теперь, что обобщенные восприимчивости $\alpha_{ab}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ совпадают с компонентами тензора

$$-D^R_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')/\hbar c^2.$$

В силу (75,10) отсюда сразу следует (для немагнитоактивных сред), что

$$D^R_{ik}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')=D^R_{ki}(\omega;\mathbf{r}',\mathbf{r}). \tag{75,12}$$

Соотношения же (75,9) принимают вид

$$\overline{A}_{i\omega}(\mathbf{r})=-\frac{1}{\hbar c}\int D^R_{ik}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')\,j_{k\omega}(\mathbf{r}')\,d^3x'. \tag{75,13}$$

Среднее значение $\overline{\mathbf{A}}$ есть не что иное, как векторный потенциал макроскопического (полностью усредненного—см. начало параграфа) электромагнитного поля в среде; ниже черту над $\mathbf{A}$ (а также и над другими макроскопическими величинами) не будем писать. Учтем теперь, что макроскопическое поле, создаваемое классическим током $\mathbf{j}$, удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_\omega=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\omega-\frac{i\omega}{c}\mathbf{D}_\omega,$$

где $\mathbf{D}$—электрическая индукция; в общем случае анизотропной среды $\mathbf{D}_\omega$ связано с напряженностью $\mathbf{E}_\omega$ соотношениями $D_{i\omega}=\varepsilon_{ik}(\omega)E_{k\omega}$; если среда неоднородна, то тензор диэлектрической проницаемости является также и функцией координат: $\varepsilon_{ik}(\omega,\mathbf{r})$.

В выбранной нами калибровке потенциалов (75,1) имеем

$$\mathbf{B}_\omega=\operatorname{rot}\mathbf{A}_\omega,\quad \mathbf{E}_\omega=i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_\omega, \tag{75,14}$$

где $\mathbf{B}$—магнитная индукция, связанная с напряженностью $\mathbf{H}$ соотношениями $B_{i\omega}=\mu_{ik}H_{k\omega}$ [1]). Поэтому для потенциала имеем уравнение [2])

$$\left[\operatorname{rot}_{im}(\mu^{-1}_{mn}\operatorname{rot}_{nk})-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ik}\right]A_{k\omega}=\frac{4\pi}{c}j_{i\omega}.$$

Подставив сюда $\mathbf{A}_\omega$ в виде (75,13), найдем, что функция D^R_{ik} должна удовлетворять уравнению

$$\left[\operatorname{rot}_{im}(\mu^{-1}_{mn}\operatorname{rot}_{nl})-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{il}\right]D^R_{lk}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')=-4\pi\hbar\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{75,15}$$

Это уравнение существенно упрощается для изотропных (в каждом своем элементе объема) сред, когда тензоры ε_{ik} и μ_{ik} сводятся к скалярам. Магнитная проницаемость обычно близка

---

[1]) Напомним, что в макроскопической электродинамике среднее значение микроскопической электрической напряженности принято обозначать как $\mathbf{E}$, а среднее значение магнитной напряженности—как $\mathbf{B}$ и называть магнитной индукцией.

[2]) Здесь и ниже пользуемся обозначением $\operatorname{rot}_{il}=e_{ikl}\partial/\partial x_k$, где e_{ikl}—единичный антисимметричный псевдотензор. При этом $(\operatorname{rot}\mathbf{A})_i=\operatorname{rot}_{il}A_l$.

к 1, и ниже в этом параграфе мы будем считать ее равной 1. Положив $\varepsilon_{ik}=\varepsilon\delta_{ik}$ и $\mu_{ik}=\delta_{ik}$, получим уравнение

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l}-\delta_{il}\Delta-\delta_{il}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega;\mathbf{r})\right]D^R_{lk}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')=$$
$$=-4\pi\hbar\delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (75,16)$$

Таким образом, вычисление запаздывающей функции Грина для неоднородной среды сводится к решению определенного дифференциального уравнения (*И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский*, 1959). [1]).

На границах между различными средами компоненты тензора D^R_{lk} должны удовлетворять определенным условиям. В уравнении (75,16) вторая переменная $\mathbf{r}'$ и второй индекс k не участвуют в дифференциальных или алгебраических операциях, производимых над тензором D^R_{lk}, т. е. играют лишь роль параметров. Поэтому граничные условия должны ставиться только по координатам $\mathbf{r}$ для функции $D^R_{lk}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')$, рассматриваемой как вектор по индексу l. Эти условия соответствуют известным из макроскопической электродинамики требованиям непрерывности тангенциальных компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ [2]). Поскольку $\mathbf{E}=-\dot{\mathbf{A}}/c$, то роль вектора $\mathbf{E}$ играет при этом производная

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}D^R_{lk}(t;\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

или, в компонентах Фурье,

$$i\frac{\omega}{c}D^R_{lk}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}'). \quad (75,17)$$

Аналогичным образом, роль вектора $\mathbf{H}$ (совпадающего при $\mu=1$ с $\mathbf{B}$) играет

$$\operatorname{rot}_{il}D_{lk}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}'). \quad (75,18)$$

Для пространственно-однородной неограниченной среды функция D^R_{lk} зависит только от разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Для компонент фурье-разложения по этой разности дифференциальное уравне-

---

[1]) Отметим, что функция D^R_{ik} оказывается функцией Грина уравнений Максвелла в известном из математической физики смысле — решение уравнений поля с точечным источником, удовлетворяющее условию запаздывания (опережающая функция D^A_{ik} удовлетворяла бы такому же уравнению с ε^* вместо ε).

[2]) Граничные условия для нормальных компонент $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ не дают в данном случае ничего нового в соответствии с тем, что в поле, меняющемся со временем как $e^{-i\omega t}$, уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ являются следствием уравнений $\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mathbf{B}/c$, $\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\mathbf{D}/c$.

ние (75,16) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\frac{1}{4\pi\hbar}\left[k_i k_l - \delta_{il}k^2 + \delta_{il}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right] D^R_{lk}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik}. \qquad (75,19)$$

Решение этих уравнений:

$$D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2\varepsilon(\omega)/c^2 - k^2}\left[\delta_{ik} - \frac{c^2 k_i k_k}{\omega^2\varepsilon(\omega)}\right]. \qquad (75,20)$$

Согласно (36,21), функция Грина D_{ik} для однородной среды выражается через запаздывающую функцию D^R_{ik} формулой

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}) + i \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\cdot \operatorname{Im} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}). \qquad (75,21)$$

При $T \to 0$ эта формула дает

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}) + i \operatorname{sign}\omega \cdot \operatorname{Im} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}). \qquad (75,22)$$

Функция D^R_{ik} дается выражением (75,20); если учесть, что $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$ — четная, а $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ — нечетная функция ω, то мы найдем, что при $T = 0$

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = D^R_{ik}(|\omega|, \mathbf{k}). \qquad (75,23)$$

В пустоте $\varepsilon(\omega) = 1$. Но поскольку во всякой материальной среде $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega) > 0$ при $\omega > 0$, то вакууму отвечает предельный переход $\varepsilon \to 1 + i0$. При этом получается выражение

$$D^{(0)}_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2/c^2 - k^2 + i0}\left(\delta_{ik} - \frac{c^2 k_i k_k}{\omega^2}\right),$$

совпадающее с известным результатом квантовой электродинамики (см. IV § 77).

§ 76. Флуктуации электромагнитного поля

Как уже было указано в начале предыдущего параграфа, при рассмотрении флуктуаций электромагнитного поля речь идет о колебаниях со временем величин, усредненных только по физически бесконечно малым элементам объема (но не по движению частиц в нем). В таком же смысле надо понимать и квантовомеханические операторы этих величин.

Основные формулы теории электромагнитных флуктуаций могут быть написаны непосредственно исходя из общих формул флуктуационно-диссипационной теоремы (V § 125). Напомним, что для дискретного набора флуктуирующих величин x_a спектральное распределение флуктуаций выражается через обобщенные восприимчивости $\alpha_{ab}(\omega)$ формулой

$$(x_a x_b)_\omega = \frac{i\hbar}{2}(\alpha^*_{ba} - \alpha_{ab}) \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T},$$