ние (75,16) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\frac{1}{4\pi\hbar}\left[k_i k_l - \delta_{il}k^2 + \delta_{il}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right] D_{lk}^R(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik}. \qquad (75,19)$$

Решение этих уравнений:

$$D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2\varepsilon(\omega)/c^2 - k^2}\left[\delta_{ik} - \frac{c^2 k_i k_k}{\omega^2\varepsilon(\omega)}\right]. \qquad (75,20)$$

Согласно (36,21), функция Грина D_{ik} для однородной среды выражается через запаздывающую функцию D_{ik}^R формулой

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}) + i \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} \cdot \operatorname{Im} D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}). \qquad (75,21)$$

При $T \to 0$ эта формула дает

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \operatorname{Re} D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}) + i \operatorname{sign}\omega \cdot \operatorname{Im} D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}). \qquad (75,22)$$

Функция D_{ik}^R дается выражением (75,20); если учесть, что $\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$ — четная, а $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ — нечетная функция ω, то мы найдем, что при $T=0$

$$D_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = D_{ik}^R(|\omega|, \mathbf{k}). \qquad (75,23)$$

В пустоте $\varepsilon(\omega) = 1$. Но поскольку во всякой материальной среде $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega) > 0$ при $\omega > 0$, то вакууму отвечает предельный переход $\varepsilon \to 1 + i0$. При этом получается выражение

$$D_{ik}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2/c^2 - k^2 + i0}\left(\delta_{ik} - \frac{c^2 k_i k_k}{\omega^2}\right),$$

совпадающее с известным результатом квантовой электродинамики (см. IV § 77).

§ 76. Флуктуации электромагнитного поля

Как уже было указано в начале предыдущего параграфа, при рассмотрении флуктуаций электромагнитного поля речь идет о колебаниях со временем величин, усредненных только по физически бесконечно малым элементам объема (но не по движению частиц в нем). В таком же смысле надо понимать и квантовомеханические операторы этих величин.

Основные формулы теории электромагнитных флуктуаций могут быть написаны непосредственно исходя из общих формул флуктуационно-диссипационной теоремы (V § 125). Напомним, что для дискретного набора флуктуирующих величин x_a спектральное распределение флуктуаций выражается через обобщенные восприимчивости $\alpha_{ab}(\omega)$ формулой

$$(x_a x_b)_\omega = \frac{i\hbar}{2}(\alpha_{ba}^* - \alpha_{ab}) \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T},$$

где сама величина $(x_a x_b)_\omega$ представляет собой компоненту фурье-разложения по времени корреляционной функции

$$\varphi_{ab}(t)=\frac{1}{2}\langle\hat{x}_a(t)\,\hat{x}_b(0)+\hat{x}_b(0)\,\hat{x}_a(t)\rangle,$$

а $\hat{x}_a(t)$ — гейзенберговские операторы величин x_a. В случае распределенных величин $x_a(\mathbf{r})$ (функции координат точки в теле) эта формула записывается в виде

$$(x_a^{(1)}x_b^{(2)})_\omega=\frac{i\hbar}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\left[\alpha_{ba}^*(\omega;\ \mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)-\alpha_{ab}(\omega;\ \mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\right],\tag{76,1}$$

где индексы (1) или (2) означают, что значение величины берется в точке $\mathbf{r}_1$ или $\mathbf{r}_2$.

В предыдущем параграфе было показано, что если величинами x_a являются компоненты векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})/c$, то соответствующими обобщенными восприимчивостями будут компоненты тензора $-D_{ik}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)/\hbar c^2$. Поэтому сразу находим

$$(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_\omega=\frac{i}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\left\{D_{ik}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-[D_{ki}^R(\omega;\ \mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)]^*\right\}.\tag{76,2}$$

Спектральные функции флуктуаций напряженностей поля получаются из (76,2) простым способом. Пусть $\varphi_{ik}^A(t_1,\mathbf{r}_1;\ t_2,\mathbf{r}_2)$ — корреляционная функция флуктуаций векторного потенциала; выражение (76,2) есть компонента фурье-разложения этой функции по $t=t_1-t_2$. Поскольку электрическая напряженность

$$\mathbf{E}=-\frac{\dot{\mathbf{A}}}{c},$$

то такая же функция для компонент $\mathbf{E}$

$$\varphi_{ik}^E=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}\varphi_{ik}^A=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_{ik}^A,$$

или, в фурье-компонентах:

$$(E_i^{(1)}E_k^{(2)})_\omega=\frac{\omega^2}{c^2}(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_\omega.\tag{76,3}$$

Аналогичным образом, учитывая связь $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$, получим

$$(B_i^{(1)}B_k^{(2)})_\omega=\operatorname{rot}_{il}^{(1)}\operatorname{rot}_{km}^{(2)}(A_l^{(1)}A_m^{(2)})_\omega,\tag{76,4}$$

$$(E_i^{(1)}B_k^{(2)})_\omega=\frac{i\omega}{c}\operatorname{rot}_{km}^{(2)}(A_i^{(1)}A_m^{(2)})_\omega.\tag{76,5}$$

Выражая корреляционные функции электромагнитных флуктуаций через запаздывающую функцию Грина, формулы (76,2—5) сводят задачу об их вычислении к решению дифференциального уравнения (75,15) или (75,16) с надлежащими краевыми условиями на заданных границах тел[1]).

Ниже мы будем считать, что среда немагнитоактивна. Тогда функция D_{ik}^R обладает свойством симметрии (75,12) и выражение (76,2) принимает вид

$$(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_\omega = -\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\operatorname{Im}D_{ik}^R(\omega;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{76,6}$$

Обратим внимание на то, что выражение (76,6) вещественно. Вместе с ним вещественны и (76,3—4), а (76,5)—мнимо. Это значит, что функции временной корреляции компонент **E** и компонент **B** друг с другом четны по времени $t = t_1 - t_2$ (как и должно быть для корреляции между величинами, которые обе четны или обе нечетны по отношению к обращению времени). Функция же временной корреляции компонент **E** с компонентами **B** нечетна по времени (как и должно быть для двух величин, из которых одна четна, а другая нечетна относительно обращения времени). Отсюда следует, что значения **E** и **B** в одинаковый момент времени не коррелированы друг с другом (нечетная функция t обращается в нуль при $t = 0$). Вместе с корреляционной функцией обращаются в нуль также и средние значения от любых билинейных по (взятым в одинаковый момент времени) **E** и **B** выражений, например, от вектора Пойнтинга. Последнее обстоятельство, впрочем, заранее очевидно: в теле, находящемся в тепловом равновесии и инвариантном относительно обращения времени, не может быть внутренних макроскопических потоков энергии.

§ 77. Электромагнитные флуктуации в неограниченной среде

В однородной неограниченной среде функции $D_{ik}(\omega;\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ зависят только от разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ причем четны по этой переменной (уравнение (75,15) содержит только вторые производные по координатам, и потому $D_{ik}(\omega;\, \mathbf{r})$ и $D_{ik}(\omega; -\mathbf{r})$ удовлетворяют одному и тому же уравнению). Взяв фурье-компоненты по $\mathbf{r}$ от обеих сторон равенства (76,2), получим

$$(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_{\omega\mathbf{k}} = \frac{i}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\{D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}) - [D_{ki}^R(\omega, \mathbf{k})]^*\}. \tag{77,1}$$

Для немагнитоактивных сред, с учетом (75,12), эта формула записывается в виде

$$(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_{\omega\mathbf{k}} = -\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\operatorname{Im}D_{ik}^R(\omega, \mathbf{k}). \tag{77,2}$$

---

[1]) Теория электромагнитных флуктуаций была развита в другой форме *С. М. Рытовым* (1953), а в форме, эквивалентной (76,2—5),—*М. Л. Левиным* и *С. М. Рытовым* (1967).