уравнения (75,15) или (75,16) с надлежащими краевыми условиями на заданных границах тел[1]).

Ниже мы будем считать, что среда немагнитоактивна. Тогда функция D^R_{ik} обладает свойством симметрии (75,12) и выражение (76,2) принимает вид

$$(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_\omega = -\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\operatorname{Im} D^R_{ik}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{76,6}$$

Обратим внимание на то, что выражение (76,6) вещественно. Вместе с ним вещественны и (76,3—4), а (76,5)—мнимо. Это значит, что функции временной корреляции компонент **E** и компонент **B** друг с другом четны по времени $t=t_1-t_2$ (как и должно быть для корреляции между величинами, которые обе четны или обе нечетны по отношению к обращению времени). Функция же временной корреляции компонент **E** с компонентами **B** нечетна по времени (как и должно быть для двух величин, из которых одна четна, а другая нечетна относительно обращения времени). Отсюда следует, что значения **E** и **B** в одинаковый момент времени не коррелированы друг с другом (нечетная функция t обращается в нуль при $t=0$). Вместе с корреляционной функцией обращаются в нуль также и средние значения от любых билинейных по (взятым в одинаковый момент времени) **E** и **B** выражений, например, от вектора Пойнтинга. Последнее обстоятельство, впрочем, заранее очевидно: в теле, находящемся в тепловом равновесии и инвариантном относительно обращения времени, не может быть внутренних макроскопических потоков энергии.

§ 77. Электромагнитные флуктуации в неограниченной среде

В однородной неограниченной среде функции $D_{ik}(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ зависят только от разности $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ причем четны по этой переменной (уравнение (75,15) содержит только вторые производные по координатам, и потому $D_{ik}(\omega; \mathbf{r})$ и $D_{ik}(\omega; -\mathbf{r})$ удовлетворяют одному и тому же уравнению). Взяв фурье-компоненты по $\mathbf{r}$ от обеих сторон равенства (76,2), получим

$$(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_{\omega\mathbf{k}} = \frac{i}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\{D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}) - [D^R_{ki}(\omega, \mathbf{k})]^*\}. \tag{77,1}$$

Для немагнитоактивных сред, с учетом (75,12), эта формула записывается в виде

$$(A_i^{(1)}A_k^{(2)})_{\omega\mathbf{k}} = -\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\operatorname{Im} D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}). \tag{77,2}$$

[1]) Теория электромагнитных флуктуаций была развита в другой форме *С. М. Рытовым* (1953), а в форме, эквивалентной (76,2—5),—*М. Л. Левиным* и *С. М. Рытовым* (1967).

В изотропной немагнитной ($\mu=1$) среде функция $D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ дается формулой (75,20). Задача же об определении пространственной корреляционной функции флуктуаций сводится к вычислению интеграла

$$D^R_{ik}(\omega; \mathbf{r}) = \int D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{77,3}$$

Интегрирование осуществляется формулами

$$\begin{aligned} &\int \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+\varkappa^2} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}, \\ &\int \frac{k_i k_k e^{i\mathbf{kr}}}{k^2+\varkappa^2} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}, \end{aligned} \tag{77,4}$$

из которых первая получается путем взятия компонент Фурье от известного равенства

$$(\Delta - \varkappa^2) \frac{e^{-\varkappa r}}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \tag{77,5}$$

а вторая получается дифференцированием первой. В результате найдем

$$D^R_{ik}(\omega; \mathbf{r}) = -\hbar\left[\delta_{ik} + \frac{c^2}{\omega^2\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k}\right] \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon}\, r\right), \tag{77,6}$$

где $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, а корень $\sqrt{-\varepsilon}$ должен быть взят с таким знаком, чтобы было $\operatorname{Re}\sqrt{-\varepsilon} > 0$; для пустоты надо положить $\varepsilon = 1$, $\sqrt{-\varepsilon} = -i$ (см. ниже).

Отсюда, согласно (76,6) и (76,3), сразу находим

$$(E^{(1)}_i E^{(2)}_k)_\omega = \\ = \hbar \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\delta_{ik} + \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k}\right] \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon r}\right)\right\} \tag{77,7}$$

(*С. М. Рытов*, 1953). Свернув это выражение по индексам i, k (и воспользовавшись формулой (77,5)), получим

$$(\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)})_\omega = 2\hbar \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2 r} \exp\left(-\frac{\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon r}\right) + 2\pi\delta(\mathbf{r})\right]\right\}. \tag{77,8}$$

Аналогичным образом, вычисление по формуле (76,4) приводит к выражениям для корреляционных функций магнитного поля, отличающихся от (77,7—8) отсутствием множителя $1/\varepsilon$ перед квадратной скобкой; при этом член с δ-функцией под знаком Im в (77,8) становится вещественным и выпадает из ответа. Связь выражений (77,7—8) с мнимой частью ε ясно подчеркивает связь электромагнитных флуктуаций с поглощением в среде. Но если произвести переход к пределу $\operatorname{Im}\varepsilon \to 0$ в формулах (77,7—8), мы получим конечные, отличные от нуля выражения.

Это обстоятельство связано с порядком перехода к двум пределам—бесконечным размерам среды и равной нулю $\operatorname{Im}\varepsilon$. Поскольку в бесконечной среде уже сколь угодно малое $\operatorname{Im}\varepsilon$ приводит в конце концов к поглощению, то при использованном нами порядке перехода к пределам получающийся результат относится к физически прозрачной среде, в которой, как и во всякой реальной среде, сколько-нибудь отличное от нуля поглощение все же имеется.

Произведем, например, указанный переход в формуле (77,8). Для этого замечаем, что при малом положительном $\operatorname{Im}\varepsilon$ (при $\omega > 0$)

$$\sqrt{-\varepsilon} \approx -i\sqrt{\operatorname{Re}\varepsilon}\left(1+i\frac{\operatorname{Im}\varepsilon}{2\operatorname{Re}\varepsilon}\right)$$

(с учетом требования $\operatorname{Re}\sqrt{-\varepsilon} > 0$). Поэтому в пределе $\operatorname{Im}\varepsilon \to 0$ получим

$$(\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)})_\omega = \frac{1}{n^2}(\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)})_\omega = \frac{2\omega^2\hbar}{c^2 r}\sin\frac{\omega n r}{c}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}, \tag{77,9}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$—вещественный показатель преломления. Ввиду отсутствия члена с δ-функцией это выражение остается конечным и при совпадающих точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$:

$$(\mathbf{E}^2)_\omega = \frac{1}{n^2}(\mathbf{H}^2)_\omega = \frac{2\omega^3\hbar n}{c^3}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}. \tag{77,10}$$

Предельный переход к случаю прозрачной среды можно было бы произвести и на более ранней стадии вычислений—в грииновской функции. Учтя, что знак $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ совпадает со знаком ω, найдем, что в этом пределе функция (75,20) принимает вид

$$D^R_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\hbar}{\omega^2 n^2/c^2 - k^2 + i0\cdot\operatorname{sign}\omega}\left[\delta_{ik} - \frac{c^2 k_i k_k}{\omega^2 n^2}\right] \tag{77,11}$$

(*М. И. Рязанов*, 1957). Мнимая часть этой функции связана только с правилом обхода полюсов $\omega = \pm ck/n$; отделив ее с помощью формулы (8,11) и подставив в (77,2), получим

$$(E_i^{(1)}E_k^{(2)})_{\omega\mathbf{k}} = \\ = \frac{2\pi^2\hbar}{k}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{n^2}\right)\left\{\delta\left(\frac{n\omega}{c} - k\right) - \delta\left(\frac{n\omega}{c} + k\right)\right\}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}. \tag{77,12}$$

Аргументы δ-функций в этом выражении имеют простой физический смысл: они показывают, что флуктуации поля с заданным значением $\mathbf{k}$ распространяются в пространстве со скоростью c/n, совпадающей со скоростью распространения электромагнитных волн в данной среде. Фурье-обращением выражения (77,12) можно, разумеется, снова получить (77,7).

Энергия флуктуационного электромагнитного поля в прозрачной среде (с $\mu = 1$) в спектральном интервале $d\omega$ дается (в единице объема пространства) выражением

$$\frac{1}{8\pi}\left[2(\mathbf{E}^2)_\omega \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + 2(\mathbf{H}^2)_\omega\right]\frac{d\omega}{2\pi}$$

(см. VIII § 61)[1]). Подставив сюда (77,10), получим после простого преобразования

$$\left[\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}\right]\frac{\omega^2 n^2}{\pi^2 c^3}\frac{d(n\omega)}{d\omega}\,d\omega. \qquad (77,13)$$

Первый член в скобках связан с нулевыми колебаниями поля. Второй же член дает энергию термодинамически равновесного электромагнитного излучения в прозрачной среде, т. е. энергию *черного излучения*. Эту часть формулы можно было бы получить и без рассмотрения флуктуаций, путем соответствующего обобщения формулы Планка для черного излучения в пустоте. Согласно последней, энергия черного излучения (в единице объема) в интервале волновых векторов d^3k дается формулой

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}\frac{2d^3k}{(2\pi)^3}$$

(множитель 2 учитывает два направления поляризации). Соответственно для получения спектральной плотности энергии надо заменить d^3k на $4\pi k^2 dk$ и подставить $k=\omega/c$. Для перехода же от пустоты к прозрачной среде достаточно положить $k=n\omega/c$, т. е. написать

$$k^2dk = k^2\frac{dk}{d\omega}d\omega = \frac{\omega^2 n^2}{c^3}\frac{d(n\omega)}{d\omega}\,d\omega,$$

что и дает требуемый результат.

Задачи

1. Найти флуктуации электромагнитного поля вдали от тела, погруженного в прозрачную разреженную среду, с которой оно находится в тепловом равновесии; длина волны излучения и расстояние от тела к точке наблюдения велики по сравнению с размерами тела. Тело обладает анизотропной электрической поляризуемостью $\alpha_{ik}(\omega)$.

Решение. Разреженную прозрачную среду рассматриваем как вакуум. Искомые флуктуации определяются малым (на больших расстояниях) изменением вакуумной функции Грина, вызванным присутствием тела. Для вычис-

[1]) Полная энергия получается интегрированием по $d\omega$ от 0 до ∞; множители же 2 в квадратных скобках связаны с тем, что по принятому нами определению спектральных функций флуктуаций среднее значение $\langle x^2\rangle$ получается интегрированием $(x^2)_\omega$ по $d\omega/2\pi$ от $-\infty$ до ∞ (см. V (122,6)).

ления этого изменения исходим из аналогии, согласно которой вакуумную функцию $D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ (при заданном индексе k) можно формально рассматривать как электрическое поле $E_i(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$, создаваемое в точке $\mathbf{r}$ некоторым источником, находящимся в точке $\mathbf{r}'$. Эта аналогия основана на том, что поле $E_i(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ (как и его потенциал $A_i(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$) удовлетворяет при $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'$ такому же уравнению, как и функция $D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ — уравнение (75,16) с $\varepsilon=1$. Пусть тело находится в точке $\mathbf{r}=0$. Поле

$$E_l(0,\ \mathbf{r}')=D^R_{lk}(\omega;\ 0,\ \mathbf{r}')\equiv D^R_{lk}(\omega;\ \mathbf{r}')$$

(где $D^R_{lk}(\omega;\ \mathbf{r})$ — гриновская функция в пустоте в отсутствие тела, даваемая выражением (77,6) с $\varepsilon=1$) поляризует тело, создавая тем самым в точке $\mathbf{r}=0$ дипольный момент $d_i=\alpha_{il}D^R_{lk}(\omega;\ 0,\ \mathbf{r}')$. Поле же, создаваемое, в свою очередь, этим дипольным моментом в точке $\mathbf{r}$, и дает искомое изменение $\delta D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$. Согласно известной из электродинамики формуле (см. II § 72), поле, создаваемое в точке $\mathbf{r}$ находящимся в точке $\mathbf{r}=0$ дипольным моментом $\mathbf{d}$ (зависящим от времени как $e^{-i\omega t}$), есть

$$E_i=d_l\left[\frac{\omega^2}{c^2}\delta_{il}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_l}\right]\frac{e^{i\omega r/c}}{r},$$

причем расстояние r должно быть большим только по сравнению с размером тела, но не с длиной волны; это выражение можно представить в виде

$$E_i=-\frac{\omega^2}{\hbar c^2}D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r})\,d_l$$

(напомним, что функция $D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r})$ четна по переменной $\mathbf{r}$). С написанным выше дипольным моментом находим, следовательно,

$$\delta D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')=-\frac{\omega^2}{\hbar c^2}D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r})\,\alpha_{lm}D^R_{mk}(\omega;\ \mathbf{r}').$$

Искомые корреляционные функции флуктуаций даются теперь общими формулами (76,3—6) с δD^R_{ik} вместо D^R_{ik}. Окончательно получаем

$$\delta\left(A_i^{(1)}A_k^{(2)}\right)_\omega=\frac{2\omega^2}{\hbar c^2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1}\right\}\operatorname{Im}\left[D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,\alpha_{lm}D^R_{mk}(\omega;\ \mathbf{r}_2)\right]. \qquad (1)$$

Напомним, что тело находится в точке $\mathbf{r}=0$, а $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — две точки вдали от тела. Отметим, что вклад во флуктуации возникает не только от мнимой, но и от вещественной части поляризуемости; последний можно рассматривать как результат рассеяния на теле черного излучения, заполняющего прозрачную среду.

2. То же для тела с магнитной поляризуемостью $\alpha_{ik}(\omega)$ [1].

Решение. В этом случае рассматриваем $\operatorname{rot}_{il}D^R_{lk}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ как магнитное поле $H_i(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$, создаваемое в точке $\mathbf{r}$ источником, находящимся в точке $\mathbf{r}'$ (уравнению того же вида, что и для функции D^R_{ik}, удовлетворяет не само поле H_i, а его потенциал A_i). Это поле намагничивает тело, создавая в точке $\mathbf{r}=0$ магнитный момент

$$m_i=-\alpha_{il}\operatorname{rot}'_{lm}D^R_{mk}(\omega;\ 0,\ \mathbf{r}')$$

---

[1]) Наличие магнитной поляризуемости не обязательно означает, что тело состоит из магнитного материала. Так, речь может идти о вытеснении магнитного поля из тела за счет скин-эффекта.

(дифференцирование по $\mathbf{r}$ заменено дифференцированием по $\mathbf{r}'$ с учетом того, что D^R_{mk} зависит только от разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$). Искомое же изменение гриновской функции совпадает с векторным потенциалом магнитного поля, создаваемого этим магнитным моментом в точке $\mathbf{r}$:

$$A_i = \operatorname{rot}_{il}\left[\frac{1}{r} m_l e^{i\omega r/c}\right]$$

(см. II § 72, задача 1). Таким образом,

$$\delta D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') = -\left(\operatorname{rot}_{il}\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\right)\alpha_{lm}\operatorname{rot}'_{mn}D^R_{nk}(\omega;\ 0,\ \mathbf{r}').$$

Наконец, подставив D^R_{nk} из (77,6), находим

$$\delta D^R_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') = \hbar\left(\operatorname{rot}_{il}\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\right)\alpha_{lm}\operatorname{rot}'_{mk}\frac{e^{i\omega r'/c}}{r'} \qquad (2)$$

(использовано, что $\operatorname{rot}_{mn}\nabla_n = e_{mkn}\nabla_k\nabla_n \equiv 0$).

3. Определить флуктуации электромагнитного поля в условиях задачи 1, считая, однако, что температура среды много ниже температуры тела.

Решение. Вычисленное в задаче 1 поле естественно делится, в соответствии с наличием двух членов в фигурной скобке в (1), на нулевые флуктуации и тепловое черное излучение. Последнее, в свою очередь, состоит из двух частей—теплового излучения самого тела и поля, возникшего при рассеянии черного излучения среды на теле. Если температура среды низка, вторая часть отсутствует. Для решения задачи мы вычислим ее отдельно, а затем вычтем из (1). Положим $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{A}^{(s)}$, где $\mathbf{A}^{(0)}$—флуктуационное поле в отсутствие тела, а $\mathbf{A}^{(s)}$—поле, рассеянное телом. На больших расстояниях, где $\mathbf{A}^{(s)}$ мало, можно при вычислении $\delta(A_{i1}A_{k2})_\omega$ пренебречь членами, квадратичными по $\mathbf{A}^{(s)}$. Для вклада от рассеяния имеем поэтому

$$\delta^{(s)}(A_{i1}A_{k2})_\omega \approx (A^{(s)}_{i1}A^{(0)}_{k2})_\omega + (A^{(0)}_{i1}A^{(s)}_{k2})_\omega = (A^{(s)}_{i1}A^{(0)}_{k2})_\omega + (A^{(s)}_{k2}A^{(0)}_{i1})_\omega^*.$$

Рассеянное поле снова дается формулой из II § 72, но теперь под дипольным моментом надо понимать просто момент, индуцированный черным излучением: $d_i = \alpha_{ik}A^{(0)}_k(0)$. Введя опять гриновскую функцию в вакууме в отсутствие тела, имеем

$$A^{(s)}_i(\mathbf{r}_1) = -\frac{\omega^2}{\hbar c^2}D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,\alpha_{lm}(\omega)\,A^{(0)}_m(0),$$

так что

$$(A^{(s)}_{i1}A^{(0)}_{k2})_\omega = -\frac{\omega^2}{\hbar c^2}D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,\alpha_{lm}\left(A^{(0)}_m(0)\,A^{(0)}_k(\mathbf{r}_2)\right)_\omega.$$

Корреляционную функцию $(A^{(0)}_{m1}A^{(0)}_{k2})_\omega$ берем снова из (76,2). При этом, поскольку нас интересует только тепловое излучение, надо опустить в этой формуле нулевые колебания, т. е. заменить

$$\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1}.$$

В результате находим для вклада рассеянного черного излучения в корреляционную функцию

$$\delta^{(s)}(A_{i1}A_{k2})_\omega = \frac{2\omega^2}{\hbar c^2\left(e^{\hbar\omega/T}-1\right)}\left[D^R_{il}(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,\alpha_{lm}\operatorname{Im}D^R_{mk}(\omega;\ \mathbf{r}_2) + D^{R*}_{kl}(\omega;\ \mathbf{r}_2)\,\alpha^*_{lm}\operatorname{Im}D^R_{mi}(\omega,\ \mathbf{r}_1)\right]. \qquad (3)$$

Окончательно, чтобы найти флуктуационное поле в холодной среде, надо вычесть (3) из (1). После простых преобразований с использованием симметрии тензоров D_{ik} и α_{ik} получим

$$\delta^{(T)}(A_{i1}A_{k2})_\omega = \frac{2\omega^2}{\hbar c^2\left(e^{\hbar\omega/T}-1\right)} D_{il}^R(\omega;\ \mathbf{r}_1)\,[\operatorname{Im}\alpha_{lm}(\omega)]\,D_{mk}^{R*}(\omega;\ \mathbf{r}_2) \tag{4}$$

(T — температура тела). Здесь выписан лишь тепловой член; член с нулевыми колебаниями в (1) остается без изменений. Обратим внимание на то, что выражение (4), определяющее тепловое излучение тела, зависит только от мнимой части поляризуемости. Поток энергии, вычисленный по выражению (4), уже не равен нулю, а дает интенсивность теплового излучения нагретого тела в окружающую холодную среду.

§ 78. Флуктуации тока в линейных цепях

Еще одно интересное применение флуктуационно-диссипационной теоремы представляет вопрос о флуктуациях тока в линейных цепях, впервые рассмотренный *Найквистом* (*H. Nyquist*, 1928).

Флуктуации тока представляют собой свободные (т. е. происходящие в отсутствие приложенной извне электродвижущей силы) электрические колебания в проводнике. В линейной замкнутой цепи наибольший интерес представляют, естественно, те колебания, при которых возникает текущий вдоль провода полный ток J. Ниже мы предполагаем выполненным условие квазистационарности — размеры цепи малы по сравнению с длиной волны $\lambda \sim c/\omega$. Тогда полный ток J одинаков во всех участках цепи и является функцией лишь от времени.

Выберем этот ток J в качестве величины $x(t)$, фигурирующей в общей формулировке флуктуационно-диссипационной теоремы в V § 124. Для того чтобы выяснить смысл соответствующей обобщенной восприимчивости α, предположим, что в цепи действует внешняя электродвижущая сила $\mathscr{E}$. Тогда диссипация энергии в цепи $Q = J\mathscr{E}$. Сравнив с выражением $Q = -\overline{x}\dot{f}$, служащим определением «силы» f (см. V (123,10)), мы видим, что $\dot{f} = -\mathscr{E}$ или для фурье-компонент $\mathscr{E}_\omega = i\omega f_\omega$. С другой стороны, ток и э. д. с. в линейной цепи связаны соотношением $\mathscr{E}_\omega = Z(\omega)J_\omega$, где $Z(\omega)$ — комплексное сопротивление (импеданс) цепи. Поэтому имеем

$$J_\omega = \mathscr{E}_\omega/Z = i\omega f_\omega/Z$$

и, сравнив с определением обобщенной восприимчивости в соотношении $(\overline{x})_\omega = \alpha(\omega) f$, находим $\alpha(\omega) = i\omega/Z(\omega)$. Ее мнимая часть:

$$\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\frac{i\omega}{Z} = \frac{\omega}{|Z|^2}R(\omega),$$

где $R = \operatorname{Re} Z$.