

Согласно флуктуационно-диссипационной теореме,

$$(x^2)_\omega = \hbar \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \cdot \operatorname{Im} \alpha(\omega),$$

находим теперь для спектральной функции флуктуаций тока

$$(J^2)_\omega = \frac{\hbar\omega}{|Z(\omega)|^2} R(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (78,1)$$

Эту формулу можно представить в другом виде, описывая флуктуации тока как результат действия «случайной» э. д. с.  $\mathcal{E}_\omega = ZJ_\omega$ . Для нее имеем

$$(\mathcal{E}^2)_\omega = \hbar\omega R(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}. \quad (78,2)$$

В классическом случае ( $\hbar\omega \ll T$ )

$$(\mathcal{E}^2)_\omega = 2TR(\omega). \quad (78,3)$$

Подчеркнем лишний раз, что эти формулы совершенно не зависят от природы явлений, ответственных за дисперсию сопротивления цепи.

### § 79. Температурная функция Грина фотона в среде

Температурная функция Грина фотона в среде строится по мацубаровским операторам потенциалов электромагнитного поля подобно тому, как временная функция Грина (75,2) строится из гейзенберговских операторов:

$$\mathcal{D}_{ik} = -\langle T_\tau \hat{A}_i^M(\tau_1, \mathbf{r}_1) \hat{A}_k^M(\tau_2, \mathbf{r}_2) \rangle. \quad (79,1)$$

Здесь учтено, что в силу эрмитовости шредингеровских операторов поля мацубаровские операторы  $\hat{A}^M$  и  $\hat{\bar{A}}^M$  (определенные согласно (37,1)) совпадают друг с другом. Эти операторы, однако (в отличие от гейзенберговских), сами уже не эрмитовы; ввиду вещественности параметра  $\tau$  имеем

$$[\hat{A}^M(\tau, \mathbf{r})]^+ = [e^{\tau\hat{H}'/\hbar} \hat{A}(\mathbf{r}) e^{-\tau\hat{H}'/\hbar}]^+ = e^{-\tau\hat{H}'/\hbar} \hat{A}(\mathbf{r}) e^{\tau\hat{H}'/\hbar}$$

или

$$[\hat{A}^M(\tau, \mathbf{r})]^+ = \hat{\bar{A}}^M(-\tau, \mathbf{r}).$$

Поскольку функция (79,1) зависит только от разности  $\tau = \tau_1 - \tau_2$  (ср. § 37), то можно написать (положив, например,  $\tau > 0$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ik}(\tau; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= -\langle \hat{A}_i^M(\tau, \mathbf{r}_1) \hat{A}_k^M(0, \mathbf{r}_2) \rangle, \\ \mathcal{D}_{ik}(-\tau; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= -\langle \hat{A}_k^M(\tau, \mathbf{r}_2) \hat{A}_i^M(0, \mathbf{r}_1) \rangle. \end{aligned}$$

Из сравнения этих двух выражений видно, что

$$\mathcal{D}_{ik}(-\tau; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{D}_{ki}(\tau; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (79,2)$$

Функция  $\mathcal{D}_{ik}$  может быть разложена в ряд Фурье по переменной  $\tau$ :

$$\mathcal{D}_{ik}(\tau; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-i\zeta_s \tau}, \quad (79,3)$$

причем «частоты»  $\zeta_s$  пробегает (ввиду статистики Бозе, которой подчиняются фотоны) значения  $\hbar\zeta_s = 2\pi sT$  (ср. (37,8)). Для компонент этого разложения из (79,2) следует аналогичное соотношение

$$\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{D}_{ki}(-\zeta_s; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (79,4)$$

Согласно общему соотношению (37,12), эти компоненты связаны с запаздывающей функцией Грина равенством

$$\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = D_{ik}^R(i\zeta_s; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$$

при положительных  $\zeta_s$ . В § 75 было показано, что функции  $D_{ik}^R(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  можно в известном смысле рассматривать как обобщенные восприимчивости, фигурирующие в общей теории отклика макроскопической системы на внешнее воздействие. Отсюда следовало свойство симметрии этих функций, выражаемое (для немагнитоактивных сред) равенством (75,12), а ввиду связи между функциями  $D_{ik}^R$  и  $\mathcal{D}_{ik}$  таким же свойством обладают и последние:

$$\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{D}_{ki}(\zeta_s; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (79,5)$$

Из этого равенства, вместе с равенством (79,4), следует теперь, что функции  $\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  четны по дискретной переменной  $\zeta_s$ , так что при всех (положительных и отрицательных) ее значениях имеем

$$\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = D_{ik}^R(i|\zeta_s|; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (79,6)$$

Далее, функция  $D_{ik}^R(\omega; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , как и всякая обобщенная восприимчивость, вещественна на верхней мнимой полуоси  $\omega$  (см. V § 123); из (79,6) следует поэтому, что функция  $\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  вещественна при всех значениях  $\zeta_s$ . Наконец, из этих свойств следует, в свою очередь, что и исходная функция  $\mathcal{D}_{ik}(\tau; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  вещественна и четна по переменной  $\tau$ :

$$\mathcal{D}_{ik}(\tau; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{D}_{ik}(-\tau; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (79,7)$$

Связь (79,6) между температурной и запаздывающей функциями Грина позволяет сразу написать дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция  $\mathcal{D}_{ik}$  в неодно-

родной среде; для этого достаточно произвести замену  $\omega \rightarrow i|\zeta_s|$  в уравнении (75,15) или (75,16). Так, для изотропной немагнитноактивной среды с  $\mu=1$  находим уравнение

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} - \delta_{il} \Delta + \frac{\zeta_s^2}{c^2} \varepsilon(i|\zeta_s|, \mathbf{r}) \delta_{il} \right] \mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\hbar \delta_{ik} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (79,8)$$

Для однородной неограниченной среды функция  $\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  разлагается в интеграл Фурье по разности  $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ . Компоненты этого разложения удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\frac{1}{4\pi\hbar} \left[ k_l k_l - \delta_{il} k^2 - \delta_{il} \frac{\zeta_s^2}{c^2} \varepsilon(i|\zeta_s|) \right] \mathcal{D}_{ik}(\zeta_s, \mathbf{k}) = \delta_{ik} \quad (79,9)$$

и даются формулой<sup>1)</sup>

$$\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s, \mathbf{k}) = - \frac{4\pi\hbar}{\zeta_s^2 \varepsilon(i|\zeta_s|)/c^2 + k^2} \left[ \delta_{ik} + \frac{c^2 k_l k_k}{\zeta_s^2 \varepsilon(i|\zeta_s|)} \right]. \quad (79,10)$$

Поскольку функция  $\mathcal{D}_{ik}(\zeta_s, \mathbf{k})$  выражается (в длинноволновой области  $ka \ll 1$ ) через  $\varepsilon(\omega)$ , то диаграммная техника для ее вычисления становится тем самым техникой для вычисления диэлектрической проницаемости среды. При этом последняя имеет также и определенный диаграммный смысл, который будет сейчас выяснен.

Будем изображать точную  $\mathcal{D}$ -функцию жирной, а функцию  $\mathcal{D}^{(0)}$  в вакууме — тонкой пунктирной линией по правилу<sup>2)</sup>

$$\text{-----} = \text{-----} - \mathcal{D}_{ik} \quad \text{-----} = \text{-----} - \mathcal{D}_{ik}^{(0)} \quad (79,11)$$

Вся совокупность диаграмм, изображающих  $\mathcal{D}$ -функцию, может быть изображена рядом (вполне аналогичным ряду (14,3) для функции  $G$ ):

$$\text{-----} = \text{-----} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \quad (79,12)$$

где кружок изображает совокупность диаграммных блоков, не распадающихся на две части, связанные только одной пунктирной линией; обозначим эту совокупность посредством  $\mathcal{P}_{ik}/4\pi$ .

<sup>1)</sup> В реальных применениях (ср. § 80) функция  $\mathcal{D}_{ik}$  всегда фигурирует в произведении с  $\zeta_s^2$ ; поэтому расходимость при  $\zeta_s=0$  фактически устраняется.

<sup>2)</sup> Использование пунктира для обозначения  $\mathcal{D}$ -функций не может вызвать здесь недоразумений, так как в этом и следующем параграфах не будет фигурировать в явном виде энергия парного взаимодействия частиц среды (для которой ранее использовалось это обозначение).

Функцию  $\mathcal{P}_{ik}$  (аналогичную собственно-энергетической части гриновской функции частиц) называют *поляризационным оператором*.

Диаграммное равенство (79,12) эквивалентно уравнению

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \quad (79,13)$$

(ср. переход от (14,3) к (14,4)). В аналитическом виде оно дает

$$\mathcal{D}_{ik} = \mathcal{D}_{ik}^{(0)} + \mathcal{D}_{il}^{(0)} \frac{\mathcal{P}_{lm}}{4\pi} \mathcal{D}_{mk} \quad (79,14)$$

(все множители — функции одинаковых аргументов  $\zeta_s, \mathbf{k}$ ). Умножив это равенство справа на обратный тензор  $\mathcal{D}^{-1}$  и слева — на  $\mathcal{D}^{(0)-1}$ , перепишем его в виде

$$\mathcal{D}_{ik}^{-1} = \mathcal{D}_{ik}^{(0)-1} - \mathcal{P}_{ik}/4\pi. \quad (79,15)$$

Наконец, взяв  $\mathcal{D}_{ik}^{-1}$  из левой стороны уравнения (79,9) и такое же выражение с  $\varepsilon = 1$  для  $\mathcal{D}_{ik}^{(0)-1}$ , найдем

$$\mathcal{P}_{ik}(\zeta_s, \mathbf{k}) = \frac{\zeta_s^2}{\hbar c^2} [\varepsilon(i|\zeta_s) - 1] \delta_{ik}, \quad (79,16)$$

чем и определяется диаграммный смысл функции  $\varepsilon(\omega) - 1$  в дискретном множестве точек на верхней мнимой полуоси  $\omega$ . Аналитическое продолжение функции  $\varepsilon(i|\zeta_s)$  на всю верхнюю полуплоскость должно, в принципе, производиться с учетом того, что  $\varepsilon(\omega)$  не должна иметь особенностей в этой полуплоскости и что  $\varepsilon(\omega) \rightarrow 1$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ <sup>1)</sup>.

В неоднородной среде поляризационный оператор является (как и  $\mathcal{D}_{ik}$ ) функцией координат двух точек. Повторив весь вывод в координатном представлении, получим вместо (79,14) уравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \\ &= \mathcal{D}_{ik}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{D}_{il}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \mathcal{P}_{lm}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \mathcal{D}_{mk}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) d^3x_3 d^3x_4 \end{aligned}$$

(аргументы  $\zeta_s$  для краткости не выписываем). Подействовав на это равенство слева оператором

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{1n} \partial x_{1l}} - \delta_{nl} \Delta_1 + \frac{\zeta_s^2}{c^2} \delta_{nl}$$

<sup>1)</sup> В анизотропной среде надо писать

$$\mathcal{P}_{ik}(\zeta_s, \mathbf{k}) = (\zeta_s^2/\hbar c^2) [\varepsilon_{ik}(i|\zeta_s) - \delta_{ik}].$$

Отметим, что в таком виде это выражение остается справедливым и при наличии пространственной дисперсии, когда  $\varepsilon_{ik}$  зависит не только от частоты, но и от волнового вектора.

и учтя, что  $D^{(0)}$  удовлетворяет уравнению (79,8) с  $\varepsilon = 1$ , получим

$$\int \mathcal{P}_{il}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \mathcal{D}_{ik}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) d^3x' = [\varepsilon(\mathbf{r}_1) - 1] \frac{\zeta_s^2}{\hbar c^2} \mathcal{D}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

откуда

$$\mathcal{P}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\zeta_s^2}{\hbar c^2} \delta_{ik} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) [\varepsilon(i|\zeta_s|, \mathbf{r}_1) - 1]. \quad (79,17)$$

Структура конденсированной среды, а с нею и ее диэлектрические свойства определяются силами, действующими между ее частями на расстояниях порядка атомных размеров  $a$ . На этих расстояниях можно (при нерелятивистских скоростях частиц) пренебречь запаздыванием взаимодействий, которое становится существенным лишь для длинноволновых (в смысле  $ka \ll 1$ ) компонент поля; другими словами, при вычислении поляризационного оператора можно пренебречь длинноволновой частью поля. В диаграммах же для самой гриновской функции  $\mathcal{D}_{ik}$  длинноволновое поле фигурирует лишь через тонкие пунктиры в правой стороне (79,12).

Рассмотренный в этом параграфе трехмерный тензор  $\mathcal{P}_{ik}$  является, конечно, лишь пространственной частью поляризационного 4-тензора  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ . Подчеркнем, во избежание недоразумений, что его временная  $\mathcal{P}_{00}$  и смешанные  $\mathcal{P}_{0i}$  компоненты отнюдь не равны нулю. Более того, как и в квантовой электродинамике, этот 4-тензор вообще не зависит от калибровки потенциалов. В нерелятивистской теории эта калибровочная инвариантность очевидна уже из указанной только что возможности вычисления поляризационного оператора с учетом одних только незапаздывающих сил, не зависящих от калибровки длинноволнового поля<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. IV § 100. Пользуемся случаем исправить ошибку, допущенную в изложенных там рассуждениях. 4-тензор, обратный точному фотонному пропагатору  $\mathcal{D}_{\mu\nu}$  (обозначения, как в IV!), имеет вид

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{1}{\mathcal{D}^{(l)}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

и аналогично для пропагатора свободных фотонов  $D_{\mu\nu}$  (в IV (100,18) был пропущен второй член в этих выражениях). Эти 4-тензоры зависят от калибровки и не являются поперечными. Вывод о поперечности поляризационного оператора и о его калибровочной инвариантности, однако, не меняется. Дело в том, что продольная часть пропагатора связана с не имеющей физического смысла продольной частью 4-потенциала и не участвует во взаимодействии. Поэтому взаимодействие не меняет ее, так что  $\mathcal{D}^{(l)} = D^l$ . В силу равенства  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = D_{\mu\nu}^{-1} - \mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$  (IV (100,14)) отсюда и следует поперечность  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$  и его независимость от  $\mathcal{D}^{(l)}$ .

Компоненты  $\mathcal{P}_{00}$  и  $\mathcal{P}_{0i}$  можно найти из условия поперечности 4-тензора:  $\mathcal{P}_{\mu\nu}k^\mu = 0$ , где  $k^\mu = (i\zeta_s, \mathbf{k})$  — волновой 4-вектор:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{00} &= -\frac{k^2}{\hbar c^2} [\varepsilon(i|\zeta_s|) - 1], \\ \mathcal{P}_{0i} &= \frac{i\zeta_s k_i}{\hbar c^2} [\varepsilon(i|\zeta_s|) - 1].\end{aligned}\tag{79,18}$$

## § 80. Тензор напряжений ван-дер-ваальсовых сил

Хотя структура конденсированных тел в основном определяется (как было отмечено в конце предыдущего параграфа) силами, действующими между его частицами на атомных расстояниях, но определенный вклад в термодинамические величины тела (скажем, в его свободную энергию) вносят также и так называемые *ван-дер-ваальсовы силы* — силы, действующие между атомами на расстояниях, больших по сравнению с атомными размерами  $a$ . Напомним, что для свободных атомов энергия этого взаимодействия убывает с расстоянием, как  $r^{-6}$  (см. III § 89), а после того, как становятся существенными эффекты запаздывания, — как  $r^{-7}$  (см. IV § 83). В конденсированной среде, разумеется, ван-дер-ваальсовы силы не сводятся к взаимодействию отдельных пар атомов. В то же время тот факт, что их радиус действия велик по сравнению с межатомными расстояниями, позволяет подойти к вопросу об их влиянии на термодинамические свойства тел с макроскопической точки зрения.

В макроскопической теории ван-дер-ваальсово взаимодействие в материальной среде рассматривается как осуществляющееся через длинноволновое электромагнитное поле (Е. М. Лифшиц, 1954); напомним, что это понятие включает в себя не только тепловые флуктуации, но и нулевые колебания поля. Важное свойство вклада этого взаимодействия в свободную энергию состоит в его неаддитивности: он не просто пропорционален объему тел, а зависит еще и от параметров, характеризующих их форму и взаимное расположение. Именно эта неаддитивность, связанная с дальнедействующим характером ван-дер-ваальсовых сил, является тем свойством, которое выделяет их вклад в свободную энергию от гораздо большей ее аддитивной части. В макроскопической картине происхождение этого свойства связано с тем, что всякое изменение электрических свойств среды в некоторой области приводит в силу уравнений Максвелла к изменению флуктуационного поля и вне этой области. Фактически, конечно, эффекты неаддитивности оказываются заметными лишь при достаточно малых (хотя и больших по сравнению с атомными размерами) характерных размерах: для тонких пленок, для тел, разделенных узкой щелью, и т. п.