нены соответствующими функциями $-\mathcal{D}^E_{ik}$ и $-\mathcal{D}^H_{ik}$. Этой аналогии не следует, однако, придавать слишком глубокое значение: она отнюдь не означает существования для переменного электромагнитного поля как такового общего выражения для тензора напряжений в поглощающей среде (содержащего в качестве характеристики среды лишь ее диэлектрическую проницаемость). В данном случае мы имеем дело не с произвольным электромагнитным полем, а с термодинамически равновесным собственным флуктуационным полем в среде.

§ 81. Молекулярные силы взаимодействия между твердыми телами. Общая формула

Применим полученные в предыдущем параграфе общие формулы к вычислению сил, действующих между твердыми телами, поверхности которых сближены до очень малых расстояний, удовлетворяющих лишь одному условию: они должны быть велики по сравнению с межатомными расстояниями в телах. Именно это условие позволяет подойти к вопросу с макроскопической точки зрения, в которой тела рассматриваются как сплошные среды, а их взаимодействие — как осуществляющееся посредством флуктуационного электромагнитного поля. При этом существенны те флуктуации, длины волн которых порядка величины характерных размеров задачи — ширины щели между телами[1]).

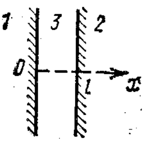

Рис. 17.

Будем обозначать индексами *1* и *2* величины, относящиеся к двум твердым телам, а индексом *3* — величины, относящиеся к пространству щели между ними (рис. 17). Щель будем предполагать плоскопараллельной; ось x направим перпендикулярно ее плоскости (так что поверхностями тел *1* и *2* будут плоскости $x=0$ и $x=l$, где l — ширина щели). Сила F, действующая на единицу площади поверхности, скажем, тела *2*, вычисляется как поток импульса, втекающего в тело через эту поверхность. Этот поток дается компонентой σ_{xx} электромагнитного тензора напряжений в пространстве щели, взятого при $x=l$. В пустоте $\varepsilon=1$ и выражение σ_{xx} из (80,16) сводится к[2])

$$F=\sigma_{xx}(l)=\frac{T}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\{\mathcal{D}^E_{yy}(\zeta_n;\ l,\ l)+\mathcal{D}^E_{zz}(\zeta_n;\ l,\ l)-\mathcal{D}^E_{xx}(\zeta_n;\ l,\ l)+$$
$$+\mathcal{D}^H_{yy}(\zeta_n;\ l,\ l)+\mathcal{D}^H_{zz}(\zeta_n;\ l,\ l)-\mathcal{D}^H_{xx}(\zeta_n;\ l,\ l)\} \quad (81,1)$$

(индекс суммирования обозначаем в этом параграфе буквой n).

---

[1]) Результаты §§ 81, 82 принадлежат *Е. М. Лифшицу* (1954).

[2]) В промежуточных вычислениях полагаем $\hbar=1$, $c=1$.

В силу однородности задачи в направлениях y и z функции $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_n; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ зависят только от разностей $y-y'$ и $z-z'$ (аргументы $y-y'$ и $z-z'$ в (80,1) не выписаны); $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_n, \mathbf{q}; x, x')$ — фурье-компоненты по этим переменным. Тогда

$$\mathscr{D}_{ik}(\zeta_n; \mathbf{r}, \mathbf{r}) = \int \mathscr{D}_{ik}(\zeta_n, \mathbf{q}; x, x) \frac{d^2q}{(2\pi)^2}. \tag{81,2}$$

Для функций $\mathscr{D}_{ik}(\zeta_n, \mathbf{q}; x, x')$ уравнения (79,8) принимают вид (ось y направляем вдоль вектора $\mathbf{q}$)

$$\begin{gathered}
\left(w^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{zz}(x, x') = -4\pi\delta(x-x'),\\
\left(w^2 - q^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{yy}(x, x') + iq\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{xy}(x, x') = -4\pi\delta(x-x'),\\
w^2\mathscr{D}_{xy}(x, x') + iq\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yy}(x, x') = 0,\\
w^2\mathscr{D}_{xx}(x, x') + iq\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yx}(x, x') = -4\pi\delta(x-x'),
\end{gathered}$$

где $w = (\varepsilon\zeta_n^2 + q^2)^{1/2}$, $\varepsilon = \varepsilon(i\zeta_n)$, а x' играет роль параметра (компоненты же $\mathscr{D}_{xz} = \mathscr{D}_{yz} = 0$, поскольку уравнения для них оказываются однородными). Решение этой системы сводится к решению всего двух уравнений

$$\left(w^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{zz}(x, x') = -4\pi\delta(x-x'), \tag{81,3}$$

$$\left(w^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathscr{D}_{yy}(x, x') = -\frac{4\pi w^2}{\varepsilon\zeta_n^2}\delta(x-x'), \tag{81,4}$$

после чего $\mathscr{D}_{xy}$ и $\mathscr{D}_{xx}$ определяются как

$$\begin{gathered}
\mathscr{D}_{xy}(x, x') = -\frac{iq}{w^2}\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yy}(x, x'),\\
\mathscr{D}_{xx}(x, x') = -\frac{iq}{w^2}\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yx}(x, x') - \frac{4\pi}{w^2}\delta(x-x').
\end{gathered} \tag{81,5}$$

При этом надо учесть, что в силу (79,5) $\mathscr{D}_{yx}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathscr{D}_{xy}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, и поэтому $\mathscr{D}_{yx}(\mathbf{q}; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathscr{D}_{xy}(-\mathbf{q}; \mathbf{x}', \mathbf{x})$.

Краевые условия, соответствующие непрерывности тангенциальных компонент напряженности электрического и магнитного полей, сводятся к требованию непрерывности величин $\mathscr{D}^E_{yk}$, $\mathscr{D}^E_{zk}$, $\mathscr{D}^H_{yk}$, $\mathscr{D}^H_{zk}$ или, что то же, к непрерывности величин

$$\mathscr{D}_{yk}, \quad \mathscr{D}_{zk}, \quad \mathrm{rot}_{yl}\,\mathscr{D}_{lk}, \quad \mathrm{rot}_{zl}\,\mathscr{D}_{lk}.$$

Используя первое из равенств (81,5), получим, что на границе раздела должны быть непрерывны

$$\mathscr{D}_{zz}, \quad \frac{d}{dx}\mathscr{D}_{zz}, \quad \mathscr{D}_{yy}, \quad \frac{\varepsilon}{w^2}\frac{d}{dx}\mathscr{D}_{yy}. \tag{81,6}$$

Поскольку мы имеем в виду вычислить тензор напряжений лишь в области щели, то можно сразу считать, что $0 < x' < l$. В области $0 < x < l$ функции $\mathcal{D}_{yy}$ и $\mathcal{D}_{zz}$ определяются уравнениями (81,3—4) с $\varepsilon = 1$, $w = w_3 = (\zeta_n^2 + q^2)^{1/2}$. В областях 1 $(x < 0)$ и 2 $(x > l)$ они удовлетворяют тем же уравнениям без правых частей (поскольку здесь $x \neq x'$) соответственно с ε_1, w_1 и ε_2, w_2 в качестве ε, w.

Необходимое, согласно (80,17), вычитание сводится к тому, что из всех функций $\mathcal{D}_{ik}$ в области щели следует вычесть их значения при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Вследствие этого, в частности, можно сразу опустить второй член справа во втором из равенств (81,5), так что в области щели

$$\mathcal{D}_{xy} = -\frac{iq}{w_3^2}\frac{d}{dx}\mathcal{D}_{yy}, \quad \mathcal{D}_{xx} = -\frac{iq}{w_3^2}\frac{d}{dx}\mathcal{D}_{yx}. \tag{81,7}$$

Прежде чем приступить к решению уравнений, сделаем еще одно замечание. Общее решение уравнений (81, 3—4) имеет вид $f^-(x-x') + f^+(x+x')$. Используя уравнения (81, 3—4), (81,7) и определение функций $\mathcal{D}_{ik}^E$ и $\mathcal{D}_{ik}^H$, можно показать, что части гриновских функций, зависящие от суммы $x+x'$, не вносят никакого вклада в выражение (81,1) для силы. Мы не останавливаемся здесь на этом, так как этот результат заранее очевиден из физических соображений: положив $x = x'$ в решении вида $f^+(x+x')$, мы бы получили поток импульса в щели, который зависел бы от координаты — в противоречии с законом сохранения импульса. В дальнейшем мы будем поэтому приводить в результате только выражения для частей гриновских функций $\mathcal{D}_{ik}^-$, не зависящих от $x+x'$.

Перейдем к нахождению функции $\mathcal{D}_{zz}$. Она удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\left(w_1^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathcal{D}_{zz}(x, x') = 0, && x < 0,\\
&\left(w_2^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathcal{D}_{zz}(x, x') = 0, && x > l,\\
&\left(w_3^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\mathcal{D}_{zz}(x, x') = -4\pi\delta(x-x'), && 0 < x < l.
\end{aligned} \tag{81,8}$$

Отсюда находим

$$\mathcal{D}_{zz} = Ae^{w_1 x}, \quad x < 0, \quad \mathcal{D}_{zz} = Be^{-w_2 x}, \quad x > l,$$
$$\mathcal{D}_{zz} = C_1 e^{w_3 x} + C_2 e^{-w_3 x} - \frac{2\pi}{w_3} e^{-w_3 |x-x'|}, \quad 0 < x < l.$$

В последнем выражении учтено, что в силу третьего из уравнений (81,8) производная $d\mathcal{D}_{zz}/dx$ испытывает при $x = x'$ скачок, равный 4π. Определив A, B, C_1, C_2 (функции x') из граничных условий непрерывности $\mathscr{D}_{zz}$ и $d\mathscr{D}_{zz}/dx$, получим

$$\mathscr{D}_{zz}^{-}=\frac{4\pi}{w_3\Delta}\operatorname{ch} w_3(x-x')-\frac{2\pi}{w_3}e^{-w_3|x-x'|}, \quad 0<x<l,$$

где

$$\Delta=1-e^{2w_3 l}\frac{(w_1+w_3)(w_2+w_3)}{(w_1-w_3)(w_2-w_3)}.$$

Вычтя значение $\mathscr{D}_{zz}^{-}$ при $w_1=w_2=w_3$ (при этом $1/\Delta=0$), имеем окончательно

$$\mathscr{D}_{zz}^{-}=\frac{4\pi}{w_3\Delta}\operatorname{ch} w_3(x-x').$$

Аналогично, решая уравнение для $\mathscr{D}_{yy}$, получим (после вычитания)

$$\mathscr{D}_{yy}^{-}=\frac{4\pi w_3}{\zeta_n^2\Delta_1}\operatorname{ch} w_3(x-x'),$$

$$\Delta_1=1-e^{2w_3 l}\frac{(\varepsilon_1 w_3+w_1)(\varepsilon_2 w_3+w_2)}{(\varepsilon_1 w_3-w_1)(\varepsilon_2 w_3-w_2)}$$

и, используя (81,7),

$$\mathscr{D}_{xy}^{-}=\mathscr{D}_{yx}^{-}=-\frac{4\pi i q}{\zeta_n^2\Delta_1}\operatorname{sh} w_3(x-x'),$$

$$\mathscr{D}_{xx}^{-}=-\frac{4\pi q^2}{\zeta_n^2 w_3\Delta_1}\operatorname{ch} w_3(x-x').$$

Вычислив теперь функции $\mathscr{D}_{ik}^{E}$ и $\mathscr{D}_{ik}^{H}$, преобразовав их затем согласно (81,2) и подставив в (81,1), получим

$$F(l)=-\frac{T}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\int_0^{\infty} w_3\left(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\Delta_1}\right)q\,dq.$$

Наконец, перейдя к новой переменной интегрирования p, согласно $q=\zeta_n\sqrt{p^2-1}$, и возвратившись к обычным единицам, мы придем к окончательному выражению для силы F, действующей на единицу площади каждого из двух тел, разделенных щелью шириной l:

$$F(l)=\frac{T}{\pi c^3}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\zeta_n^3\int_1^{\infty}p^2\left\{\left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)}\exp\left(\frac{2p\zeta_n}{c}l\right)-1\right]^{-1}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1)(s_2+p\varepsilon_2)}{(s_1-p\varepsilon_1)(s_2-p\varepsilon_2)}\exp\left(\frac{2p\zeta_n}{c}l\right)-1\right]^{-1}\right\}dp, \qquad (81,9)$$

где

$$s_1=\sqrt{\varepsilon_1-1+p^2}, \quad s_2=\sqrt{\varepsilon_2-1+p^2}, \quad \zeta_n=2\pi nT/\hbar,$$

ε_1, ε_2—функции мнимой частоты $\omega = i\zeta_n$; напомним в этой связи, что $\varepsilon(i\zeta)$—положительная вещественная величина, монотонно убывающая от своего электростатического значения ε_0 при $\zeta=0$ до 1 при $\zeta=\infty$[1]). Положительные значения F соответствуют притяжению тел. Подынтегральное выражение в каждом из членов суммы в (81,9) положительно и при каждых заданных p и ζ_n монотонно убывает с ростом l[2]). Отсюда следует, что $F>0$, $dF/dl<0$, т. е. тела (разделенные пустой щелью) притягиваются с силой, монотонно убывающей с увеличением расстояния.

Общая формула (81,9) очень сложна. Она, однако, может быть существенно упрощена в связи с тем, что влияние температуры на силу взаимодействия обычно совершенно несущественно[3]). Дело в том, что благодаря наличию экспонент в подынтегральных выражениях в (81,9) главную роль в сумме играют лишь те члены, для которых $\zeta_n \sim c/l$ или $n \sim c\hbar/lT$. В случае $lT/c\hbar \ll 1$ существенными будут, таким образом, большие значения n и в (81,9) можно перейти от суммирования к интегрированию по $dn = \hbar\, d\zeta/2\pi T$. При этом температура исчезает из формулы, и мы приходим к следующему результату:

$$F(l) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \int_1^\infty p^2\zeta^3 \left\{ \left[\frac{(s_1+p)(s_2+p)}{(s_1-p)(s_2-p)} \exp\left(\frac{2p\zeta}{c} l\right) - 1 \right]^{-1} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{(s_1+p\varepsilon_1)(s_2+p\varepsilon_2)}{(s_1-p\varepsilon_1)(s_2-p\varepsilon_2)} \exp\left(\frac{2p\zeta}{c} l\right) - 1 \right]^{-1} \right\} dp\, d\zeta. \quad (81,10)$$

Согласно сказанному, эта формула применима для расстояний $l \ll c\hbar/T$; уже при комнатных температурах это дает расстояния примерно до 10^{-4} *см*. Формула (81,10) допускает дальнейшее существенное упрощение в двух предельных случаях.

§ 82. Молекулярные силы взаимодействия между твердыми телами. Предельные случаи

Остановимся сначала на предельном случае «малых» расстояний, под которыми подразумеваются расстояния, малые по сравнению с длинами волн λ_0, характерными для спектров поглоще-

---

[1]) Формула (81,9) выведена в предположении изотропии обоих тел. Поэтому ее применимость к кристаллам связана с возможностью пренебрежения анизотропией их диэлектрической проницаемости. Хотя это в большинстве случаев вполне допустимо, следует иметь в виду, что анизотропия тел приводит, вообще говоря, еще и к специфическому эффекту—появлению момента сил, стремящегося повернуть тела друг относительно друга.

[2]) В этом легко убедиться, заметив, что для $s=(\varepsilon-1+p^2)^{1/2}$ (где $p \geqslant 1$) имеют место неравенства $\varepsilon p > s > p$ при $\varepsilon > 1$.

[3]) Говоря о влиянии температуры, мы отвлекаемся от того, которое связано просто с зависимостью от температуры самой диэлектрической проницаемости.