

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — функции мнимой частоты $\omega = i\zeta_n$; напомним в этой связи, что $\varepsilon(i\zeta)$ — положительная вещественная величина, монотонно убывающая от своего электростатического значения ε_0 при $\zeta = 0$ до 1 при $\zeta = \infty$ ¹⁾. Положительные значения F соответствуют притяжению тел. Подынтегральное выражение в каждом из членов суммы в (81,9) положительно и при каждом заданных ρ и ζ_n монотонно убывает с ростом l ²⁾. Отсюда следует, что $F > 0$, $dF/dl < 0$, т. е. тела (разделенные пустой щелью) притягиваются с силой, монотонно убывающей с увеличением расстояния.

Общая формула (81,9) очень сложна. Она, однако, может быть существенно упрощена в связи с тем, что влияние температуры на силу взаимодействия обычно совершенно несущественно³⁾. Дело в том, что благодаря наличию экспонент в подынтегральных выражениях в (81,9) главную роль в сумме играют лишь те члены, для которых $\zeta_n \sim c/l$ или $n \sim c\hbar/lT$. В случае $lT/c\hbar \ll 1$ существенными будут, таким образом, большие значения n и в (81,9) можно перейти от суммирования к интегрированию по $dn = \hbar d\zeta/2\pi T$. При этом температура исчезает из формулы, и мы приходим к следующему результату:

$$F(l) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \int_1^\infty \rho^2 \zeta^3 \left\{ \left[\frac{(s_1 + \rho)(s_2 + \rho)}{(s_1 - \rho)(s_2 - \rho)} \exp\left(\frac{2\rho\zeta}{c} l\right) - 1 \right]^{-1} + \left[\frac{(s_1 + \rho\varepsilon_1)(s_2 + \rho\varepsilon_2)}{(s_1 - \rho\varepsilon_1)(s_2 - \rho\varepsilon_2)} \exp\left(\frac{2\rho\zeta}{c} l\right) - 1 \right]^{-1} \right\} d\rho d\zeta. \quad (81,10)$$

Согласно сказанному, эта формула применима для расстояний $l \ll c\hbar/T$; уже при комнатных температурах это дает расстояния примерно до 10^{-4} см. Формула (81,10) допускает дальнейшее существенное упрощение в двух предельных случаях.

§ 82. Молекулярные силы взаимодействия между твердыми телами. Предельные случаи

Остановимся сначала на предельном случае «малых» расстояний, под которыми подразумеваются расстояния, малые по сравнению с длинами волн λ_0 , характерными для спектров поглоще-

¹⁾ Формула (81,9) выведена в предположении изотропии обоих тел. Поэтому ее применимость к кристаллам связана с возможностью пренебрежения анизотропией их диэлектрической проницаемости. Хотя это в большинстве случаев вполне допустимо, следует иметь в виду, что анизотропия тел приводит, вообще говоря, еще и к специфическому эффекту — появлению момента сил, стремящегося повернуть тела друг относительно друга.

²⁾ В этом легко убедиться, заметив, что для $s = (\varepsilon - 1 + \rho^2)^{1/2}$ (где $\rho \geq 1$) имеют место неравенства $\varepsilon\rho > s > \rho$ при $\varepsilon > 1$.

³⁾ Говоря о влиянии температуры, мы отвлекаемся от того, которое связано просто с зависимостью от температуры самой диэлектрической проницаемости.

ния данных тел. Температуры, о которых может идти речь для конденсированных тел, во всяком случае малы по сравнению с играющими здесь роль $\hbar\omega_0$ (например, в видимой части спектра), поэтому неравенство $Tl/\hbar c \ll 1$ заведомо выполняется.

Благодаря наличию экспоненциального множителя в знаменателях подинтегрального выражения при интегрировании по dp существенна область, в которой $p\zeta l/c \sim 1$. При этом $p \gg 1$, и поэтому при определении главного члена в интеграле можно положить $s_1 \approx s_2 \approx p$. В этом приближении первое слагаемое в фигурных скобках в (81,10) обратится в нуль. Второй же член после введения переменной интегрирования $x = 2p\zeta l/c$ даст

$$F(l) = \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 \left[\frac{(\epsilon_1 + 1)(\epsilon_2 + 1)}{(\epsilon_1 - 1)(\epsilon_2 - 1)} e^x - 1 \right]^{-1} dx d\zeta \quad (82,1)$$

(нижний предел интегрирования по dx заменен в этом же приближении нулем)¹⁾.

Сила в этом случае оказывается обратно пропорциональной кубу расстояния, что, впрочем, и следовало ожидать в соответствии с обычным законом ван-дер-ваальсовых сил между двумя атомами (см. ниже примечание на стр. 404). Функции $\epsilon(i\zeta) - 1$ монотонно убывают с увеличением ζ , стремясь к нулю. Поэтому значения ζ , начиная с некоторого $\zeta \sim \zeta_0$, перестают вносить существенный вклад в интеграл; условие малости l означает, что должно быть $l \ll c/\zeta_0$.

Покажем, каким образом можно перейти от макроскопической формулы (82,1) к взаимодействию отдельных атомов в пустоте. Для этого предположим формальным образом оба тела достаточно разреженными. С макроскопической точки зрения это значит, что их диэлектрические проницаемости близки к единице, т. е. разности $\epsilon_1 - 1$ и $\epsilon_2 - 1$ малы. Из (82,1) имеем тогда

¹⁾ Интеграл вида

$$\frac{a}{2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{ae^x - 1}$$

при изменении a от ∞ до 1 меняется незначительно: от 1 до 1,2. С практически достаточной точностью можно поэтому представить формулу (82,1) в виде

$$F = \frac{\hbar \bar{\omega}}{8\pi^2 l^3}, \quad \bar{\omega} = \int_0^\infty \frac{[\epsilon_1(i\zeta) - 1][\epsilon_2(i\zeta) - 1]}{[\epsilon_1(i\zeta) + 1][\epsilon_2(i\zeta) + 1]} d\zeta.$$

Величина $\bar{\omega}$ играет роль некоторой характерной для спектров поглощения обоих тел частоты.

с должной точностью

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\hbar}{64\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x} (\varepsilon_1 - 1) (\varepsilon_2 - 1) dx d\xi = \\
 &= \frac{\hbar}{32\pi^2 l^3} \int_0^\infty [\varepsilon_1(i\xi) - 1][\varepsilon_2(i\xi) - 1] d\xi.
 \end{aligned}$$

Выразив $\varepsilon(i\xi)$ через $\text{Im } \varepsilon(\omega)$ на вещественной оси ω , согласно (80,18), получим

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{\hbar}{8\pi^4 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\omega_1 \omega_2 \text{Im } \varepsilon_1(\omega_1) \text{Im } \varepsilon_2(\omega_2)}{(\omega_1^2 + \xi^2)(\omega_2^2 + \xi^2)} d\xi d\omega_1 d\omega_2 = \\
 &= \frac{\hbar}{16\pi^3 l^3} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \varepsilon_1(\omega_1) \text{Im } \varepsilon_2(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (82,2)
 \end{aligned}$$

Эта сила соответствует взаимодействию атомов с энергией

$$U(r) = -\frac{3\hbar}{8\pi^4 n_1 n_2 r^6} \int \int \frac{\text{Im } \varepsilon_1(\omega_1) \text{Im } \varepsilon_2(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2, \quad (82,3)$$

где r — расстояние между атомами; n_1, n_2 — плотности чисел атомов в обоих телах¹⁾. Эта формула совпадает с известной квантовомеханической формулой Лондона, получающейся с помощью обычной теории возмущений, примененной к дипольному взаимодействию двух атомов (см. III § 89, задача). При сравнении следует учесть, что мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ связана со спектральной плотностью «сил осцилляторов» $f(\omega)$ соотношением

$$\omega \text{Im } \varepsilon(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m} n f(\omega)$$

(e, m — заряд и масса электрона; см. VIII § 62); силы же осцилляторов известным образом выражаются через квадраты матричных элементов дипольного момента атомов (см. III (149,10)).

Перейдем к обратному случаю «больших» расстояний: $l \gg \lambda_0$. При этом, однако, будем считать, что расстояния все же не столь велики, чтобы нарушилось неравенство $lT/\hbar c \ll 1$.

В формуле (81,10) снова вводим новую переменную интегрирования $x = 2pl\xi/c$, но в качестве второй переменной оставляем теперь не ξ , а p . Тогда ε_1 и ε_2 окажутся функциями аргумента

¹⁾ Если потенциальная энергия взаимодействия атомов 1 и 2 есть $U(r) = -ar^{-6}$, то полная энергия парных взаимодействий всех атомов в двух подпространствах, разделенных щелью ширины l , равна $U_{\text{под}} = -apl n_1 n_2 / 2l^2$. Сила же есть $F = dU_{\text{под}}/dl = apl n_1 n_2 / 6l^3$. В этом и заключается соответствие между формулами (82,2) и (82,3).

$i\zeta = ix c/2pl$. Но благодаря наличию e^x в знаменателях подынтегрального выражения в интеграле по dx играют роль значения $x \sim 1$, а поскольку $p \geq 1$, то аргумент функции ϵ при больших l близок к нулю во всей существенной области переменных. В соответствии с этим можно заменить ϵ_1, ϵ_2 просто их значениями при $\zeta = 0$, т. е. электростатическими диэлектрическими постоянными $\epsilon_{10}, \epsilon_{20}$. Таким образом, окончательно

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[\frac{(s_{10} + p)(s_{20} + p)}{(s_{10} - p)(s_{20} - p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \left[\frac{(s_{10} + p\epsilon_{10})(s_{20} + p\epsilon_{20})}{(s_{10} - p\epsilon_{10})(s_{20} - p\epsilon_{20})} e^x - 1 \right]^{-1} \right\} dp dx, \quad (82,4)$$

$$s_{10} = \sqrt{\epsilon_{10} - 1 + p^2}, \quad s_{20} = \sqrt{\epsilon_{20} - 1 + p^2}.$$

Закон убывания силы с расстоянием (как l^{-4}) соответствует в данном случае закону убывания ван-дер-ваальсовых сил между двумя атомами с учетом запаздывания (см. ниже).

Формула (82,4) сводится к очень простому выражению в случае, когда оба тела — металлы. У металлов функция $\epsilon(i\zeta) \rightarrow \infty$ при $\zeta \rightarrow 0$; поэтому для них надо считать $\epsilon_0 = \infty$. Положив $\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = \infty$, получим

$$F = \frac{\hbar c}{16\pi^2 l^4} \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{x^3 dp dx}{p^2 (e^x - 1)} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 l^4} \quad (82,5)$$

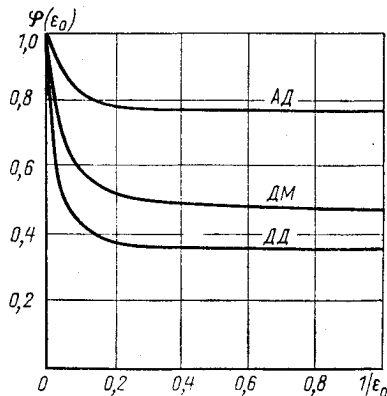


Рис. 18.

(Н. В. Г. Casimir, 1948). Эта сила вообще не зависит от рода металлов (свойство, не имеющее места на малых расстояниях, где сила взаимодействия зависит от поведения функции $\epsilon(i\zeta)$ при всех значениях ζ , а не только при $\zeta = 0$).

На рис. 18 представлен график функции $\Phi_{дд}(\epsilon_0)$, определяющий силу притяжения между двумя одинаковыми диэлектриками ($\epsilon_{10} = \epsilon_{20} \equiv \epsilon_0$); формула (82,4) представлена в виде

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 l^4} \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 1} \right)^2 \Phi_{дд}(\epsilon_0). \quad (82,6)$$

На том же рисунке дан график функции $\Phi_{дм}(\epsilon_0)$, определяющей силу притяжения для диэлектрика и металла ($\epsilon_{10} = \epsilon_0, \epsilon_{20} = \infty$)

по формуле¹⁾

$$F = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{l^4} \frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 1} \Phi_{\text{дм}}(\epsilon_0). \quad (82,7)$$

Произведем в (82,4) переход к взаимодействию отдельных атомов подобно тому, как это было сделано выше для формулы (82,1). При малых $\epsilon_0 - 1$ имеем

$$s_0 - p \approx \frac{\epsilon_0 - 1}{2p}, \quad s_0 - p\epsilon_0 \approx (\epsilon_0 - 1) \left(-p + \frac{1}{2p} \right),$$

и интеграл (82,4) принимает вид

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} (\epsilon_{i0} - 1) (\epsilon_{e0} - 1) \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \int_1^\infty \frac{1 - 2p^2 + 2p^4}{8p^6} dp,$$

откуда

$$F = \frac{\hbar c}{l^4} \frac{23}{640\pi^2} (\epsilon_{i0} - 1) (\epsilon_{e0} - 1). \quad (82,8)$$

Эта сила соответствует взаимодействию двух атомов с энергией

$$U(r) = -\frac{23\hbar c}{4\pi r^7} \alpha_1 \alpha_2, \quad (82,9)$$

где α_1, α_2 — статические поляризуемости атомов ($\epsilon_0 = 1 + 4\pi n\alpha$). Формула (82,9) совпадает с результатом расчета по квантовой электродинамике для притяжения двух атомов на достаточно больших расстояниях, когда становятся существенными эффекты запаздывания (см. IV § 85).

Наконец, рассмотрим расстояния настолько большие, что имеет место неравенство $lT/\hbar c \gg 1$, обратное тому, которое требовалось для возможности пренебрежения влиянием температуры. В этом случае из всех членов суммы в (81,9) надо сохранить лишь первый. Однако сразу положить в нем $n = 0$ нельзя ввиду возникающей при этом неопределенности (множитель ζ_n^3 обращается в нуль, но интеграл по dp расходится). Это затруднение можно обойти, введя сначала вместо p новую переменную интегрирования $x = 2p\zeta_n l/c$ (в результате чего множитель ζ_n^3 исчезает). Положив затем $\zeta_n = 0$, получим

$$F = \frac{T}{16\pi l^3} \int_0^\infty x^2 \left[\frac{(\epsilon_{i0} + 1)(\epsilon_{e0} + 1)}{(\epsilon_{i0} - 1)(\epsilon_{e0} - 1)} e^x - 1 \right]^{-1} dx. \quad (82,10)$$

Таким образом, на достаточно больших расстояниях убывание силы притяжения замедляется и снова происходит по закону l^{-3} ,

¹⁾ При $\epsilon_0 \rightarrow 1$ функции $\Phi_{\text{дд}}$ и $\Phi_{\text{дм}}$ стремятся соответственно к значениям 0,35 и 0,46, отвечающим предельным законам (82,8) и (1) в задаче к этому параграфу. При $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ обе функции стремятся к значению 1, отвечающему формуле (82,5).

но с коэффициентом, зависящим от температуры (все следующие члены суммы в (81,9) убывают с l экспоненциально). Условие $lT/\hbar c \gg 1$ есть по существу условие классичности ($\hbar\omega \ll T$, где $\omega \sim l/c$). Поэтому естественно, что (82,10) не содержит \hbar^{-1} .

Задача

Найти закон взаимодействия атома с металлической стенкой на «больших» расстояниях.

Решение. Взаимодействие отдельного атома с конденсированным телом можно найти, рассматривая лишь одно из тел (пусть это будет тело 2) как разреженную среду. Считая $\epsilon_{20} - 1$ малым и положив $\epsilon_{10} = \infty$, получим из (82,4)

$$F = \frac{\hbar c (\epsilon_{20} - 1)}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty x^3 e^{-x l x} \int \frac{dp^2}{2p^2} = \frac{3\hbar c (\epsilon_{20} - 1)}{32\pi^2 l^4}. \quad (1)$$

Если энергия взаимодействия атома со стенкой есть $U = -aL^{-4}$ (L — расстояние атома от стенки), то энергия взаимодействия атомов в полупространстве, отделенном от стенки щелью l , есть $U_{\text{пол}} = -an/3l^3$, а сила $F = dU_{\text{пол}}/dl = an/l^4$. По этому полученному значению F соответствует притяжение отдельного атома к стенке с энергией

$$U(L) = -\frac{3}{8} \frac{\hbar c}{8\pi L^4} \quad (2)$$

(*H. V. G. Casimir, D. Polder, 1948*).

Для взаимодействия атома с диэлектрической стенкой тем же путем получается результат

$$U(L) = -\frac{3\hbar c \epsilon_1 \epsilon_{10} - 1}{8\pi L^4 \epsilon_{10} + 1} \Phi_{\text{ад}}(\epsilon_{10})$$

с функцией $\Phi_{\text{ад}}$, представленной графиками на рис. 18. При $\epsilon_{10} \rightarrow 1$ она стремится к значению $23/30 = 0,77$, отвечающему формуле (82,8).

§ 83. Асимптотическое поведение корреляционной функции в жидкости

Длинноволновые электромагнитные флуктуации приводят также к некоторым специфическим свойствам корреляционной функции флуктуаций плотности в однородной жидкости.

Напомним (см. V § 116), что корреляционная функция $\nu(r)$ определяется через среднее значение от произведения флуктуаций плотности числа частиц n в двух точках пространства согласно

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_1) \delta n(\mathbf{r}_2) \rangle = \bar{n} \delta(r) + \bar{n} \nu(r), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (83,1)$$

Корреляционная функция связана со взаимодействием между

1) Полученные в §§ 81,82 формулы могут быть обобщены таким образом, чтобы включить в себя случай заполненной жидкостью щели между твердыми телами и случай тонкой жидкой пленки на твердой поверхности; см. *И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, УФН, 78, 381, 1961; Advan. in Phys., 10, 165, 1961.*