

но с коэффициентом, зависящим от температуры (все следующие члены суммы в (81,9) убывают с l экспоненциально). Условие $lT/\hbar c \gg 1$ есть по существу условие классичности ($\hbar\omega \ll T$, где $\omega \sim l/c$). Поэтому естественно, что (82,10) не содержит \hbar^{-1} .

Задача

Найти закон взаимодействия атома с металлической стенкой на «больших» расстояниях.

Решение. Взаимодействие отдельного атома с конденсированным телом можно найти, рассматривая лишь одно из тел (пусть это будет тело 2) как разреженную среду. Считая $\epsilon_{20} - 1$ малым и положив $\epsilon_{10} = \infty$, получим из (82,4)

$$F = \frac{\hbar c (\epsilon_{20} - 1)}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty x^3 e^{-x l x x} \int \frac{dp^2}{2p^2} = \frac{3\hbar c (\epsilon_{20} - 1)}{32\pi^2 l^4}. \quad (1)$$

Если энергия взаимодействия атома со стенкой есть $U = -aL^{-4}$ (L — расстояние атома от стенки), то энергия взаимодействия атомов в полупространстве, отделенном от стенки щелью l , есть $U_{\text{пол}} = -an/3l^3$, а сила $F = dU_{\text{пол}}/dl = an/l^4$. По этому полученному значению F соответствует притяжение отдельного атома к стенке с энергией

$$U(L) = -\frac{3}{8} \frac{\hbar c}{8\pi L^4} \quad (2)$$

(*H. V. G. Casimir, D. Polder, 1948*).

Для взаимодействия атома с диэлектрической стенкой тем же путем получается результат

$$U(L) = -\frac{3\hbar c \alpha_1 \epsilon_{10} - 1}{8\pi L^4 \epsilon_{10} + 1} \Phi_{\text{ад}}(\epsilon_{10})$$

с функцией $\Phi_{\text{ад}}$, представленной графиками на рис. 18. При $\epsilon_{10} \rightarrow 1$ она стремится к значению $23/30 = 0,77$, отвечающему формуле (82,8).

§ 83. Асимптотическое поведение корреляционной функции в жидкости

Длинноволновые электромагнитные флуктуации приводят также к некоторым специфическим свойствам корреляционной функции флуктуаций плотности в однородной жидкости.

Напомним (см. V § 116), что корреляционная функция $\nu(r)$ определяется через среднее значение от произведения флуктуаций плотности числа частиц n в двух точках пространства согласно

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_1) \delta n(\mathbf{r}_2) \rangle = \bar{n} \delta(r) + \bar{n} \nu(r), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (83,1)$$

Корреляционная функция связана со взаимодействием между

1) Полученные в §§ 81,82 формулы могут быть обобщены таким образом, чтобы включить в себя случай заполненной жидкостью щели между твердыми телами и случай тонкой жидкой пленки на твердой поверхности; см. *И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, УФН, 78, 381, 1961; Advan. in Phys., 10, 165, 1961.*

частицами, и ее асимптотическое поведение на больших расстояниях определяется дальнедействующей, ван-дер-ваальсовой частью этого взаимодействия. Поэтому $v(r)$, как и ван-дер-ваальсовы силы, убывает с расстоянием по степенному закону (J. Enderby, T. Gaskell, N. H. March, 1965).

Это отражается, разумеется, и на свойствах фурье-компонент корреляционной функции $v(\mathbf{k}) \equiv v(k)$. Если бы между частицами жидкости действовали только силы с радиусом действия порядка атомных размеров a , то функция $v(r)$ убывала бы с расстоянием по экспоненциальному закону с показателем $\sim r/a^1$. В терминах фурье-компонент это значит, что $v(k)$ была бы регулярной функцией от ka , разложимой при $ka \ll 1$ по четным степеням ka . Дальнедействующие же силы приводят к появлению в $v(k)$ члена (обозначим его $v_1(k)$) существенно меняющегося уже в области $k \sim 1/\lambda_0$ (a не $k \sim 1/a$), где λ_0 — характерные длины волн в спектре жидкости ($\lambda_0 \gg a$). В области $ka \ll 1$ параметр $k\lambda_0$ может быть как малым, так и большим; функция $v_1(k)$ в этой области имеет сингулярный характер.

Для вычисления корреляционной функции воспользуемся ее связью со второй вариационной производной от свободной энергии тела по его плотности. По определению, эта производная есть функция $\varphi(r)$, фигурирующая в выражении

$$\delta F = \frac{1}{2} \int \varphi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \delta n(\mathbf{r}_1) \delta n(\mathbf{r}_2) d^3x_1 d^3x_2 \quad (83,2)$$

для изменения свободной энергии, связанного с флуктуациями плотности (при заданной температуре). Фурье-компонента $\varphi(\mathbf{k}) \equiv \varphi(k)$ этой функции связана с искомой функцией $v(k)$ соотношением

$$v(k) = \frac{T}{n\varphi(k)} - 1 \quad (83,3)$$

(см. V (116,14)). Подчеркнем, что эта формула предполагает классичность флуктуаций, для чего требуется $\hbar\omega \ll T$, где ω — частота колебаний с волновым вектором k . Полагая $\omega \sim ku$ (где u — скорость звука в жидкости), получим условие

$$\hbar ku \ll T, \quad (83,4)$$

что соответствует расстояниям $r \gg \hbar u/T$.

«Регулярная» часть функции $\varphi(k)$, связанная с короткодействующими силами, разложима по степеням k ; ограничиваясь

¹⁾ Речь идет о жидкости при температурах $T \sim \Theta$ (где $\Theta \sim \hbar u/a$ — «дебаевская температура» жидкости) и вдали от критической точки. Вблизи критической точки корреляционный радиус неограниченно растет (см. V §§ 152, 153). Он растет и при низких температурах, оказываясь при $T \ll \Theta$ порядка величины $\hbar u/T$ (см. ниже § 87).

(при $ka \ll 1$) первым членом разложения и обозначив его через b , пишем

$$\varphi(k) \approx b + \varphi_1(k), \quad (83,5)$$

где $\varphi_1(k)$ — интересующая нас «сингулярная» часть функции¹⁾. Ввиду относительной слабости ван-дер-ваальсовых сил $\varphi_1(k) \ll b$, и поэтому результат подстановки (83,5) в (83,3) можно представить в виде

$$\nu(k) = \frac{T}{nb} - 1 - \frac{T}{nb^2} \varphi_1(k). \quad (83,6)$$

Поскольку связь $\nu(k)$ с $\varphi_1(k)$ оказывается линейной, то функция $\nu(r)$ на больших расстояниях есть просто

$$\nu(r) = -\frac{T}{nb^2} \varphi_1(r). \quad (83,7)$$

Первому же (не зависящему от k) члену в (83,6) отвечает координатная функция вида $\text{const} \cdot \delta(r)$, связанная с близкодействующими силами (при пренебрежении их радиусом действия).

Для определения $\varphi_1(r)$ исходим из формулы (80,11) для вариации свободной энергии. Написав в ней

$$\delta \varepsilon(i\zeta_s, r) = \frac{\partial \varepsilon(i\zeta_s)}{\partial n} \delta n(r), \quad (83,8)$$

мы видим, что выражение

$$-\frac{T}{4\pi\hbar c^2} \sum_{s=0}^{\infty} \zeta_s^2 \mathcal{D}_{II}(\zeta_s; r, r) \frac{\partial \varepsilon(i\zeta_s)}{\partial n}$$

представляет собой первую вариационную производную свободной энергии по плотности. Для второго дифференцирования надо, в свою очередь, проварьировать это выражение, т. е. найти²⁾

$$-\frac{T}{4\pi\hbar c^2} \sum_{s=0}^{\infty} \zeta_s^2 \delta \mathcal{D}_{II}(\zeta_s; r, r) \frac{\partial \varepsilon(i\zeta_s)}{\partial n}. \quad (83,9)$$

¹⁾ Постоянная b выражается через термодинамические величины жидкости согласно $b = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_T$ (см. V § 152).

²⁾ Варьируется только функция \mathcal{D}_{II} . Варьирование функции ε привело бы к члену вида $\text{const} \cdot \delta(r)$ в $\varphi(r)$, не имеющему отношения к дальнедействующим силам.

Сама \mathcal{D} -функция удовлетворяет уравнению (79,8):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} - \delta_{ii} \Delta + \frac{\zeta_s^2}{c^2} \varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r}) \delta_{ii} \right] \mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\hbar \delta_{ik} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (83,10)$$

а его варьирование дает уравнение для вариации \mathcal{D} -функции:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} - \delta_{ii} \Delta + \frac{\zeta_s^2}{c^2} \varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r}) \delta_{ii} \right] \delta \mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\zeta_s^2}{c^2} \delta \varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r}) \mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (83,11)$$

Решение уравнения (83,11) можно написать сразу, заметив, что в силу (83,10) «невозмущенная» функция \mathcal{D}_{ik} является гриновской функцией этого уравнения; поэтому

$$\delta \mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\zeta_s^2}{4\pi\hbar c^2} \int \delta \varepsilon(i\zeta_s, \mathbf{r}'') \mathcal{D}_{ik}(\zeta_s; \mathbf{r}'', \mathbf{r}') \mathcal{D}_{il}(\zeta_s; \mathbf{r}'', \mathbf{r}) d^3x''$$

(здесь использовано также, что $\mathcal{D}_{il}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') = \mathcal{D}_{li}(\mathbf{r}'', \mathbf{r})$). Наконец, подставив сюда (83,8) и затем все вместе в (83,9), получим вторую вариационную производную

$$\varphi_1(r) = -\frac{T}{(4\pi\hbar c^2)^2} \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s^4 \left[\frac{\partial \varepsilon(i\zeta_s)}{\partial n} \right]^2 \mathcal{D}_{im}^2(\zeta_s; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (83,12)$$

($r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$). Эта формула вместе с (83,7) и дает искомое общее выражение корреляционной функции $\nu(r)$ при $r \gg \hbar u/T$ (М. П. Кемоклидзе, Л. П. Пятаевский, 1970).

Предположенное уже ранее условие (83,4) для волновых векторов эквивалентно условию $r \gg \hbar u/T$ для расстояний. Если одновременно с этим условием ограничить область значений r также и сверху:

$$\hbar c/T \gg r \gg \hbar u/T, \quad (83,13)$$

то в сумме будут существенны большие значения s , и суммирование по дискретным «частотам» $\zeta_s = 2\pi T s/\hbar$ можно заменить интегрированием по $ds = \hbar d\zeta/2\pi T$:

$$\nu(r) = \frac{T}{\hbar^2 \hbar c^4} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varepsilon(i\zeta)}{\partial n} \right]^2 \zeta^4 \mathcal{D}_{im}^2(\zeta; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{d\zeta}{2\pi}. \quad (83,14)$$

Функция \mathcal{D}_{im} получается из (77,6) заменой $\omega \rightarrow i\zeta$. Произведя дифференцирование и возведя в квадрат, получим

$$\mathcal{D}_{im}^2 = \frac{2\hbar^2}{r^2} e^{-2w} \left(1 + \frac{2}{w} + \frac{5}{w^2} + \frac{6}{w^3} + \frac{3}{w^4} \right), \quad (83,15)$$

$$w = r\zeta \sqrt{\varepsilon(i\zeta)}/c.$$

Подстановка (83,15) в (83,14) приводит к довольно сложному выражению, которое, однако, упрощается в двух предельных случаях.

В случае «малых» расстояний ($r \ll \lambda_0$, ср. § 81) в интеграле существенна область $\zeta \sim c/\lambda_0$; при этом $r\zeta/c \ll 1$, так что в (83,15) можно заменить экспоненциальный множитель единицей, а в скобках сохранить лишь последний член. Тогда найдем

$$v(r) = \frac{A}{r^3}, \quad A = \frac{3\hbar T}{16\pi^3 n b^2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial \epsilon(i\zeta)}{\partial n} \right]^2 \frac{d\zeta}{\epsilon^2(i\zeta)}, \quad r \ll \lambda_0. \quad (83,16)$$

Фурье-образ этой функции¹⁾

$$v(k) = \frac{\pi^2}{12} A k^3, \quad k \lambda_0 \gg 1. \quad (83,17)$$

В обратном случае «больших» расстояний ($r \gg \lambda_0$) в интеграле существенна область $\zeta \sim c/r \ll c/\lambda_0 \sim \omega_0$. Поэтому можно заменить $\epsilon(i\zeta)$ ее электростатическим значением ϵ_0 и вынести $(\partial \epsilon_0 / \partial n)^2$ из-под знака интеграла в (83,14). После этого интегрирование производится элементарно (причем все члены в (83,15) дают вклад одинакового порядка величины). В результате получается

$$v(r) = \frac{B}{r^7}, \quad B = \frac{23\hbar c T}{64\pi^3 \epsilon_0^{3/2} n b^2} \left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial n} \right)^2, \quad r \gg \lambda_0. \quad (83,18)$$

Фурье-образ этой функции

$$v(k) = -\frac{\pi}{30} B k^4 \ln k \lambda_0, \quad k \lambda_0 \ll 1. \quad (83,19)$$

§ 84. Операторное выражение для диэлектрической проницаемости

В этом параграфе мы получим полезное представление диэлектрической проницаемости среды через коммутатор оператора плотности зарядов (*Ph. Nozières, D. Pines, 1958*). Эта формула аналогична формуле Кубо с учетом специфики электромагнитного поля.

¹⁾ Непосредственным интегрированием в сферических координатах в k -пространстве можно получить

$$I_v = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - \lambda k} k^v \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = -\frac{\Gamma(v+2) \sin(\pi v/2)}{2\pi^2 r^{v+3}}.$$

Нужный для проверки формулы (83,17) интеграл есть I_3 . Интеграл же, нужный для проверки формулы (83,19) вычисляется как dI_v/dv при $v=4$.