Подстановка (83,15) в (83,14) приводит к довольно сложному выражению, которое, однако, упрощается в двух предельных случаях.

В случае «малых» расстояний ($r \ll \lambda_0$, ср. § 81) в интеграле существенна область $\zeta \sim c/\lambda_0$; при этом $r\zeta/c \ll 1$, так что в (83,15) можно заменить экспоненциальный множитель единицей, а в скобках сохранить лишь последний член. Тогда найдем

$$\nu(r) = \frac{A}{r^6}, \quad A = \frac{3\hbar T}{16\pi^3 \bar{n} b^2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial\varepsilon(i\zeta)}{\partial \bar{n}}\right]^2 \frac{d\zeta}{\varepsilon^2(i\zeta)}, \quad r \ll \lambda_0. \qquad (83,16)$$

Фурье-образ этой функции[1])

$$\nu(k) = \frac{\pi^2}{12} A k^3, \quad k\lambda_0 \gg 1. \qquad (83,17)$$

В обратном случае «больших» расстояний ($r \gg \lambda_0$) в интеграле существенна область $\zeta \sim c/r \ll c/\lambda_0 \sim \omega_0$. Поэтому можно заменить $\varepsilon(i\zeta)$ ее электростатическим значением ε_0 и вынести $(\partial\varepsilon_0/\partial n)^2$ из-под знака интеграла в (83,14). После этого интегрирование производится элементарно (причем все члены в (83,15) дают вклад одинакового порядка величины). В результате получается

$$\nu(r) = \frac{B}{r^7}, \quad B = \frac{23\hbar c T}{64\pi^3 \varepsilon_0^{3/2} \bar{n} b^2} \left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial \bar{n}}\right)^2, \quad r \gg \lambda_0. \qquad (83,18)$$

Фурье-образ этой функции

$$\nu(k) = -\frac{\pi}{30} B k^4 \ln k\lambda_0, \quad k\lambda_0 \ll 1. \qquad (83,19)$$

§ 84. Операторное выражение для диэлектрической проницаемости

В этом параграфе мы получим полезное представление диэлектрической проницаемости среды через коммутатор оператора плотности зарядов (*Ph. Nozières*, *D. Pines*, 1958). Эта формула аналогична формуле Кубо с учетом специфики электромагнитного поля.

---

[1]) Непосредственным интегрированием в сферических координатах в $\mathbf{k}$-пространстве можно получить

$$I_\nu = \lim_{\lambda = +0} \int e^{i\mathbf{kr} - \lambda k} k^\nu \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\frac{\Gamma(\nu+2)\sin(\pi\nu/2)}{2\pi^2 r^{\nu+3}}.$$

Нужный для проверки формулы (83,17) интеграл есть I_3. Интеграл же, нужный для проверки формулы (83,19) вычисляется как $dI_\nu/d\nu$ при $\nu = 4$.

Будем рассматривать однородную среду, обладающую не только временной, но и пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости. Это значит, что индукция $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ зависит от значений напряженности $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ не только в предыдущие моменты времени, но и в других точках пространства. Такая зависимость может быть представлена в общем виде как

$$D_i(t, \mathbf{r}) = E_i(t, \mathbf{r}) + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau, \mathbf{r}') E_k(t-\tau, \mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d^3x'\, d\tau. \quad (84,1)$$

Для монохроматического поля, в котором $\mathbf{E}, \mathbf{D} \propto \exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]$, эта связь сводится к

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) E_k, \quad (84,2)$$

где

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik} + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau, \mathbf{r}') e^{i(\omega\tau - \mathbf{kr}')}\, d^3x'\, d\tau. \quad (84,3)$$

Мы ограничимся случаем, когда среда не только однородна, но и изотропна и не обладает естественной оптической активностью. Тогда диэлектрическая проницаемость остается тензором, но составленным лишь с помощью вектора $\mathbf{k}$. Общий вид такого тензора

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) \frac{k_i k_k}{k^2} + \varepsilon_t(\omega, \mathbf{k}) \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right). \quad (84,4)$$

Скалярные функции ε_l и ε_t называют соответственно *продольной* и *поперечной проницаемостями*. Если поле $\mathbf{E}$ потенциально, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, то для плоской волны $\mathbf{E}$ параллельно волновому вектору ($\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\varphi$) и тогда $\mathbf{D} = \varepsilon_l \mathbf{E}$. Если же поле соленоидально ($\operatorname{div}\mathbf{E} = i\mathbf{kE} = 0$), то $\mathbf{E}$ перпендикулярно волновому вектору, и тогда $\mathbf{D} = \varepsilon_t \mathbf{E}$.

Напомним (ср. VIII § 83), что при таком описании свойств среды уже не имеет смысла разделение среднего значения микроскопической плотности тока $\overline{\rho\mathbf{v}}$ (ρ — плотность зарядов) на две части: $\partial\mathbf{P}/\partial t$ и $c \operatorname{rot}\mathbf{M}$, где $\mathbf{P}$ — электрическая поляризация, а $\mathbf{M}$ — намагниченность среды. Другими словами, уравнения Максвелла записываются в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

без введения (наряду с магнитной индукцией $\mathbf{B}$ — средним значением микроскопической напряженности магнитного поля) еще и вектора $\mathbf{H}$. Все члены, возникающие в результате усреднения микроскопических токов, предполагаются включенными в определение $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, $\overline{\rho\mathbf{v}} = \partial\mathbf{P}/\partial t$.

Больший интерес в применениях представляет продольная проницаемость, для которой мы и выведем операторное выражение. Оно получается путем рассмотрения отклика системы на стороннее (т. е. созданное сторонними по отношению к системе источниками) потенциальное электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{ст}} = -\nabla\varphi_{\text{ст}}$.

Оператор взаимодействия системы с этим полем записывается как

$$\hat{V} = \int \hat{\rho}(t, \mathbf{r})\, \varphi_{\text{ст}}(t, \mathbf{r})\, d^3x, \tag{84,5}$$

где $\hat{\rho}(t, \mathbf{r})$ — оператор плотности заряда в системе. Сопоставив это выражение с общей формулой (75,8) и рассматривая $\varphi_{\text{ст}}$ как «обобщенную силу» f, сразу находим, согласно формулам (75,9—11), для фурье-компонент по времени от средней плотности зарядов

$$\bar{\rho}_\omega(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty\int e^{i\omega t}\langle\hat{\rho}(t, \mathbf{r})\,\hat{\rho}(0, \mathbf{r}') - \hat{\rho}(0, \mathbf{r}')\,\hat{\rho}(t, \mathbf{r})\rangle\, \varphi_\omega^{(\text{ст})}(\mathbf{r}')\, d^3x'\, dt.$$

Перейдя здесь также и к фурье-компонентам по пространству и учтя, что в силу однородности системы среднее значение коммутатора зависит только от разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, получим

$$\bar{\rho}_{\omega\mathbf{k}} = \alpha(\omega, \mathbf{k})\, \varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ст})}, \tag{84,6}$$

где

$$\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty\int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}\langle\hat{\rho}(t, \mathbf{r})\,\hat{\rho}(0, 0) - \hat{\rho}(0, 0)\,\hat{\rho}(t, \mathbf{r})\rangle\, d^3x\, dt. \tag{84,7}$$

Средняя плотность зарядов связана с вектором поляризации среды соотношением $\bar{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$ (см. VIII § 6). Для фурье-компонент отсюда следует

$$\bar{\rho}_{\omega\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\mathbf{P}_{\omega\mathbf{k}} = -i\,\frac{\varepsilon_l - 1}{4\pi}\,\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, $\Delta\varphi_{\text{ст}} = -4\pi\rho_{\text{ст}}$, где $\rho_{\text{ст}}$ — плотность зарядов, создающих стороннее поле; индукция же $\mathbf{D}$ связана с этой плотностью уравнением $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}$. Из этих двух уравнений находим

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ст})} = \frac{4\pi}{k^2}\rho_{\omega\mathbf{k}}^{(\text{ст})} = \frac{i\varepsilon_l}{k^2}\,\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}.$$

Наконец, подставив эти выражения в (84,6), получим искомое выражение продольной проницаемости

$$\frac{1}{\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})} = 1 + \frac{4\pi}{k^2}\alpha(\omega, \mathbf{k}). \tag{84,8}$$

Под $\hat{\rho}(t, \mathbf{r})$ в (84,7) следует понимать, строго говоря, оператор плотности зарядов всех частиц в системе—электронов и ядер. Обычно, однако, во всем существенном интервале значений ω и $\mathbf{k}$ вклад в проницаемость вносят главным образом электроны; поэтому под $\hat{\rho}$ можно понимать $e(\hat{n}-\bar{n})$, где $\hat{n}$— оператор электронной плотности, а $\bar{n}$—ее среднее значение.

Формулу (84,7—8) можно преобразовать еще дальше, выразив ее через матричные элементы фурье-компонент оператора $\hat{\rho}$. Для этого предварительно переписываем (84,7) в виде

$$\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i}{\hbar V}\int_0^\infty e^{i\omega t}\langle\hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t)\,\hat{\rho}_{-\mathbf{k}}(0)-\hat{\rho}_{-\mathbf{k}}(0)\,\hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t)\rangle\,dt, \qquad (84,9)$$

(V—объем системы). Матричные элементы гейзенберговского оператора $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t)$ выражаются через матричные элементы шредингеровского оператора согласно

$$(\rho_{\mathbf{k}}(t))_{mn} = e^{i\omega_{mn}t}(\rho_{\mathbf{k}})_{mn}.$$

Раскрыв произведение операторов по правилу матричного умножения и произведя интегрирование согласно (31,21), получим окончательно

$$\frac{1}{\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})} = 1 + \frac{4\pi}{\hbar k^2 V}\sum_n |(\rho_{\mathbf{k}})_{n0}|^2\left\{\frac{1}{\omega-\omega_{n0}+i0}-\frac{1}{\omega+\omega_{n0}+i0}\right\}, \qquad (84.10)$$

где индекс 0 относится к заданному состоянию, для которого ищется проницаемость.

§ 85. Вырожденная плазма

Рассмотрим полностью ионизованную плазму, в которой ионы образуют классический (больцмановский) газ, а электронная компонента уже вырождена. Для этого температура должна удовлетворять условиям

$$\mu_i \ll T \lesssim \mu_e,$$

т. е.

$$\hbar^2 n^{2/3}/m_i \ll T \lesssim \hbar^2 n^{2/3}/m_e \qquad (85,1)$$

(μ_e, μ_i—химические потенциалы электронов и ионов в плазме; m_e, m_i—их массы; n—плотность числа частиц; при оценках не делаем различия между n_e и n_i). В то же время будем считать, что плазма лишь слабо неидеальна. Для этого энергия кулоновского взаимодействия двух частиц на расстоянии