

Под $\hat{\rho}(t, \mathbf{r})$ в (84,7) следует понимать, строго говоря, оператор плотности зарядов всех частиц в системе—электронов и ядер. Обычно, однако, во всем существенном интервале значений ω и \mathbf{k} вклад в проницаемость вносят главным образом электроны; поэтому под $\hat{\rho}$ можно понимать $e(\hat{n} - \bar{n})$, где \hat{n} —оператор электронной плотности, а \bar{n} —ее среднее значение.

Формулу (84,7—8) можно преобразовать еще дальше, выразив ее через матричные элементы фурье-компонент оператора $\hat{\rho}$. Для этого предварительно переписываем (84,7) в виде

$$\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i}{\hbar V} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \langle \hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t) \hat{\rho}_{-\mathbf{k}}(0) - \hat{\rho}_{-\mathbf{k}}(0) \hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t) \rangle dt, \quad (84,9)$$

(V —объем системы). Матричные элементы гейзенберговского оператора $\hat{\rho}_{\mathbf{k}}(t)$ выражаются через матричные элементы шредингеровского оператора согласно

$$(\rho_{\mathbf{k}}(t))_{mn} = e^{i\omega_{mn}t} (\rho_{\mathbf{k}})_{mn}.$$

Раскрыв произведение операторов по правилу матричного умножения и произведя интегрирование согласно (31,21), получим окончательно

$$\frac{1}{\epsilon_{\ell}(\omega, \mathbf{k})} = 1 + \frac{4\pi}{\hbar k^2 V} \sum_n |(\rho_{\mathbf{k}})_{n0}|^2 \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_{n0} + i0} - \frac{1}{\omega + \omega_{n0} + i0} \right\}, \quad (84,10)$$

где индекс 0 относится к заданному состоянию, для которого ищется проницаемость.

§ 85. Вырожденная плазма

Рассмотрим полностью ионизованную плазму, в которой ионы образуют классический (больцмановский) газ, а электронная компонента уже вырождена. Для этого температура должна удовлетворять условиям

$$\mu_i \ll T \ll \mu_e,$$

т. е.

$$\hbar^2 n^{2/3} / m_i \ll T \ll \hbar^2 n^{2/3} / m_e \quad (85,1)$$

(μ_e , μ_i —химические потенциалы электронов и ионов в плазме; m_e , m_i —их массы; n —плотность числа частиц; при оценках не делаем различия между n_e и n_i). В то же время будем считать, что плазма лишь слабо неидеальна. Для этого энергия кулоновского взаимодействия двух частиц на расстоянии

$l \sim n^{-1/3}$ друг от друга должна быть мала по сравнению с их средней кинетической энергией ϵ . Для ионов $\epsilon \sim T$, а для электронов $\epsilon \sim \mu_e \sim n^{2/3} \hbar^2 / m_e$. Отсюда получаются условия

$$m_e e^2 / \hbar^2 \ll n^{1/3} \ll T / e^2 \quad (85,2)$$

В V § 80 было показано, что в этих условиях основным источником поправок в термодинамических величинах плазмы (по сравнению с их значениями для идеального газа) является обменное взаимодействие электронов; энергия этого взаимодействия (отнесенная к единице объема плазмы) оказывается величиной $\sim e^2 n^{4/3}$. Корреляционная же поправка (являющаяся основной в классической плазме) в вырожденной плазме мала по сравнению с обменной в отношении $\eta^{1/2}$, где $\eta = m_e e^2 / \hbar^2 n^{1/3} \ll 1$. Тем не менее ее вычисление для вырожденной плазмы представляет методический интерес и дает поучительную иллюстрацию применения диаграммной техники.

Оператор кулоновского взаимодействия частиц плазмы записывается в виде

$$\hat{V} = \frac{e^2}{2} \sum_{a, b} \int \hat{\Psi}_{\alpha\alpha}^{a+} \hat{\Psi}_{b\beta}^{'+} \frac{z_a z_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\Psi}'_{b\beta} \hat{\Psi}_{\alpha\alpha} d^3x d^3x', \quad (85,3)$$

где индексы a, b нумеруют различные сорта частиц — электроны и разные сорта ионов; $z_a e$ — заряд частиц (для электронов $z_e = -1$). Взяв ψ -операторы в маубаровском представлении, мы тем самым получим и оператор взаимодействия в этом представлении. Диаграммная техника для вычисления среднего (по распределению Гиббса) значения $\langle \hat{V} \rangle$ строится затем обычным образом путем перехода к представлению взаимодействия для маубаровских операторов; возникающий в результате ряд теории возмущений представляет собой разложение $\langle \hat{V} \rangle$ по степеням e^2 .

Выражение (85,3) не содержит «свободных» (по которым не производилось бы интегрирование) переменных. В диаграммной технике это обстоятельство выражается тем, что члены ряда теории возмущений для $\langle \hat{V} \rangle$ изображаются диаграммами, не имеющими свободных концов. Пунктирным линиям этих диаграмм (с 4-импульсами $Q = (\zeta_s, \mathbf{q})$) условимся сопоставлять множителем ¹⁾

$$-\Phi(\mathbf{q}) = -\frac{4\pi}{q^2} \quad (85,4)$$

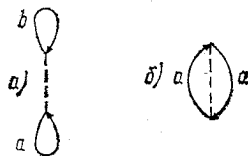
¹⁾ Далее в этом параграфе полагаем $\hbar = 1, c = 1$, а e обозначает элементарный заряд ($e > 0$).

(не зависящие от ξ_s), т. е. взятую с обратным знаком фурье-компоненту потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ поля единичного заряда. Сплошным линиям должен теперь приписываться (наряду с 4-импульсом $P = (\xi_s, \mathbf{p})$) еще и индекс a , указывающий сорта частиц, и каждой такой линии сопоставляется множитель $-\mathcal{G}_{a\alpha\beta}^{(0)}(P)$ — взятая с обратным знаком гриновская функция свободных частиц a . При этом сплошные линии диаграммы образуют замкнутые петли, каждая из которых содержит «звенья» с одинаковыми индексами a . Каждой вершине диаграммы — точке пересечения пунктира со сплошными линиями сорта a — сопоставляется дополнительно множитель z_{ae} . Каждая фермионная петля вносит дополнительный множитель (-1) . Построенные по этим правилам диаграммы дают члены разложения величины

$$-\frac{2}{V} \langle \hat{V} \rangle. \quad (85,5)$$

Множитель V в знаменателе — объем системы; этот множитель возникает в результате того, что подынтегральное выражение в каждом члене ряда зависит только от разностей координат, и поэтому одно из интегрирований по d^3x дает просто объем V . Знак минус в (85,5) — результат определения пунктиров по правилу (85,4), т. е. со знаком минус перед $\varphi(\mathbf{q})$. Множитель же 2 — результат переноса множителя $1/2$ в (85,3) в левую сторону равенства.

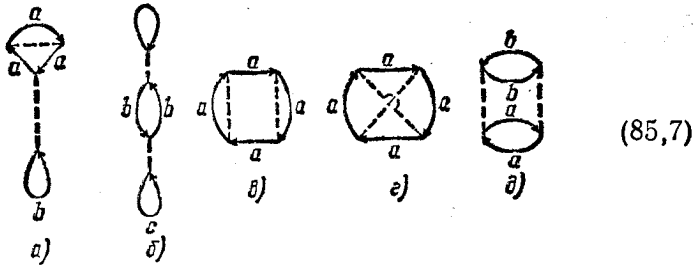
В первом порядке теории возмущений имеются диаграммы двух видов:



$$(85,6)$$

со всеми возможными a и b . Диаграммы вида (85,6a) возникают от сверток ψ -операторов, взятых в одинаковых точках пространства. Эти диаграммы отвечают прямому кулонову взаимодействию частиц a и b , равномерно распределенных в пространстве: вклады этих диаграмм взаимно сокращаются (при суммировании по всем парам a, b) ввиду электрической нейтральности плазмы. Диаграммы же вида (85,6б) возникают от сверток ψ -операторов разных аргументов и отвечают обменному взаимодействию частиц данного сорта a . Вычисление этой диаграммы приводит к результатам, полученным уже в V § 80.

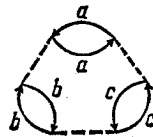
В следующем порядке возникают диаграммы следующих видов:



Диаграммы (85,7а—б) представляют собой поправки к диаграмме (85,6а) и по той же причине взаимно сокращаются при суммировании по всем a, b, c . Диаграммы (85,7в—г) представляют собой малые поправки к энергии обменного взаимодействия и не представляют здесь интереса.

Диаграмма же (85,7д) оказывается «аномально большой» ввиду расходимости соответствующего интеграла. Эта расходимость возникает в результате того, что импульсы q обоих пунктов в диаграмме одинаковы (как это очевидным образом следует из сохранения импульса в вершинах). Поэтому диаграмма содержит интеграл $\int d^3q/q^4$, расходящийся при малых q как $1/q$.

В следующих приближениях появляются (наряду с диаграммами поправочных типов) также и новые «кольцевые» диаграммы с еще более сильной расходимостью. Так, диаграмма третьего порядка



с тремя пунктирными линиями с одинаковыми импульсами q содержит интеграл $\int q^{-6} d^3q$, расходящийся, как q^{-3} . Вообще кольцевая диаграмма n -го порядка, образованная n сплошными петлями, соединенными n пунктирами, расходится, как $q^{-(2n-3)}$.

Суммирование бесконечной последовательности кольцевых диаграмм приводит, как мы увидим, к эффективному обрезанию расходимостей на значениях q порядка малости ϵ ; поэтому все эти диаграммы совместно дают вклад в $\langle \hat{V} \rangle$ порядка малости $(\epsilon^2)^n / \epsilon^{2n-3} = \epsilon^3$. Графически этот вклад изобразится суммой

(по сортам частиц) скелетных диаграмм

$$\sum_{a,b} \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ b \end{array} \quad (85,8)$$

где жирная пунктирная линия представляет сумму бесконечного множества линейных диаграмм

$$\sum_{a,b,\dots} \text{---} \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ a \end{array} \text{---} \begin{array}{c} b \\ \text{---} \\ b \end{array} \text{---} \dots \quad (85,9)$$

с различными числами сплошных петель.

В то время как тонкая пунктирная линия изображает потенциал ϕ кулонового поля изолированного заряда, толстая пунктирная линия представляет потенциал поля, искаженного поляризацией окружающей плазмы; обозначим его посредством Φ . Весь вклад (85,8) и дает, следовательно, искомую корреляционную часть средней энергии взаимодействия в плазме.

Введем обозначение $-\mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q})/4\pi$ для суммы простых сплошных петель всех родов частиц и будем обозначать эту величину графически светлым кружком:

$$-\frac{\mathcal{P}}{4\pi} = \sum_a \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ a \end{array} \equiv \bigcirc \quad (85,10)$$

Отметим, что аргумент ζ_s этой функции пробегает «четные» значения $\zeta_s = 2s\pi T$ независимо от статистики, которой подчиняются частицы a . Действительно, в силу закона сохранения частот в вершине этот аргумент равен разности частот обеих сплошных линий; эта разность «четна» как при «четных», так и при «нечетных» членах разности.

С обозначением (85,10) сумма (85,8) изобразится одной скелетной диаграммой:

$$\frac{2\langle \hat{V} \rangle_{\text{кор}}}{V} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (85,11)$$

Сама же жирная пунктирная линия удовлетворяет диаграммному уравнению

$$\text{---} \equiv \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (85,12)$$

(вполне аналогичному уравнениям (14,4) и (79,13)). В анали-

тическом виде это уравнение гласит

$$-\Phi(\zeta_s, \mathbf{q}) = -\varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{q}) \frac{\mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q})}{4\pi} \Phi(\zeta_s, \mathbf{q}),$$

откуда

$$\Phi(\zeta_s, \mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 - \mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q})}. \quad (85,13)$$

На эти формулы полезно взглянуть с несколько иной точки зрения, чтобы установить связь с диаграммами в § 79. Дело в том, что кулоново взаимодействие между зарядами можно рассматривать как результат обмена виртуальными фотонами. При этом, однако, удобнее использовать не калибровку (75,1), а так называемую «кулонову» (см. IV § 77), в которой $-D_{00}$ как раз равна фурье-компоненте кулонового потенциала. Пространственная же часть D_{ik} в этой калибровке описывает запаздывание и магнитное взаимодействие, и ею в нерелятивистской плазме можно пренебречь. Поэтому можно считать, что пунктирным линиям на диаграмме (85,11) соответствует мацубаровская \mathcal{D}_{00} , а функция \mathcal{P} есть не что иное, как компонента \mathcal{P}_{00} поляризационного оператора. Согласно (79,18) можно, следовательно, написать $\mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q}) = -q^2 [e_l(i|\zeta_s|, \mathbf{q}) - 1]$ (легко видеть, что при наличии пространственной дисперсий в (79,18) входит именно продольная проницаемость ϵ_l). Подставляя это выражение в (85,13), находим

$$\Phi(\zeta_s, \mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 \epsilon_l(i|\zeta_s|, \mathbf{q})}, \quad (85,14)$$

т. е., как и следовало, фурье-компоненту потенциала единичного заряда в среде.

Раскрыв, по общим правилам мацубаровской техники, диаграмму (85,11), находим

$$\begin{aligned} \langle \hat{V} \rangle_{\text{кор}} &= -\frac{VT}{2} \sum_s \int \frac{\mathcal{P}^2(\zeta_s, \mathbf{q})}{(4\pi)^2} \varphi(\mathbf{q}) \Phi(\zeta_s, \mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \\ &= -\frac{VT}{2} \sum_s \int \frac{\mathcal{P}^2(\zeta_s, \mathbf{q})}{q^2 [q^2 - \mathcal{P}(\zeta_s, \mathbf{q})]} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (85,15)$$

Мы увидим ниже, что основную роль в сумме играет член с $s=0$, причем соответствующий интеграл определяется областью малых \mathbf{q} . Поэтому для вычисления (85,15) фактически достаточно знать предельное значение $\mathcal{P}(0, \mathbf{q})$ при $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Эту величину легко определить из простых физических соображений, даже не прибегая к прямому вычислению по диаграммам (85,10).

При $\zeta_s=0$ функция $\Phi(0, \mathbf{q})$ представляет собой фурье-образ потенциала $\Phi(r)$ электростатического поля единичного заряда в плазме. Невозмущенный потенциал $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению Пуассона с δ -функцией в правой части: $\Delta\varphi = -4\pi\delta(\mathbf{r})$.

Уравнение же для потенциала Φ , искаженного поляризацией плазмы, получается добавлением в правой стороне изменения $\delta\rho$ плотности зарядов в плазме под влиянием самого поля:

$$\Delta\Phi = -4\pi [\delta(\mathbf{r}) + \delta\rho]. \quad (85,16)$$

С другой стороны, при $q \rightarrow 0$ мы имеем дело с полем, медленно меняющимся вдоль объема плазмы. В таком поле справедливо термодинамическое условие равновесия

$$\mu_a + ez_a\Phi = \text{const} = \mu_a^{(0)}, \quad (85,17)$$

где μ_a — химический потенциал частиц сорта a , $\mu_a^{(0)}$ — его значение в отсутствие поля. Из этого условия находим для изменения плотности частиц n_a :

$$\delta\mu_a = \left(\frac{\partial\mu_a}{\partial n_a} \right)_{T, V} \delta n_a = -ez_a\Phi$$

и затем для изменения плотности заряда:

$$\delta\rho = \sum_a ez_a \delta n_a = - \sum_a (ez_a)^2 \left(\frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \right)_{T, V} \Phi.$$

Подставив это выражение в (85,16), получим уравнение

$$\Delta\Phi - \kappa^2\Phi = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad (85,18)$$

где введено обозначение

$$\kappa^2 = 4\pi e^2 \sum_a z_a^2 \left(\frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \right)_{T, V}. \quad (85,19)$$

Из (85,18) видно, что $1/\kappa$ есть дебаевский радиус экранирования поля в плазме (ср. V § 78). Наконец, взяв фурье-компоненту от обеих сторон уравнения (85,18), найдем, что

$$\Phi(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 + \kappa^2},$$

и сравнение этого выражения с (85,13) дает

$$\mathcal{P}(0, \mathbf{q})|_{q \rightarrow 0} = -\kappa^2. \quad (85,20)$$

Производя теперь интегрирование в (85,15) с этим значением \mathcal{P} , находим

$$\langle \hat{V} \rangle_{\text{кор}} = -\frac{VT\kappa^4}{2(2\pi)^3} \int \frac{4\pi q^2 dq}{q^2(q^2 + \kappa^2)} = -\frac{VT\kappa^3}{8\pi}. \quad (85,21)$$

Отметим прежде всего, что интеграл оказывается сходящимся на нижнем пределе и основную роль в нем играют $q \sim \kappa$. Для невырожденной ионной компоненты плазмы имеем $\partial n_i / \partial \mu_i = n_i / T$, а для электронов $\partial n_e / \partial \mu_e \sim n_e / \mu_e$. Легко видеть, что в силу условий (85,2) $\kappa \ll n^{1/3}$, а потому и $q \ll n^{1/3}$, т. е. $1/q$ велико

по сравнению с межчастичными расстояниями. Этим оправдывается использование условия равновесия (85,17). Для оправдания же пренебрежения всеми членами суммы в (85,15) кроме члена с $s=0$ замечаем, что, согласно (85,14), поляризация плазмы при отличных от нуля частотах описывается диэлектрической проницаемостью $\epsilon_l(\omega, \mathbf{q})$. Согласно известному асимптотическому выражению при больших частотах, $\epsilon_l(\omega) \approx 1 - 4\pi n_e e^2 / m_e \omega^2$, а потому

$$\epsilon_l(i|\xi_s|) = 1 + \frac{4\pi n_e e^2}{m_e \xi_s^2}$$

(см. VIII § 59). В силу условий (85,1—2) все отличные от нуля частоты $\xi_s = 2s\pi T \gg (n_e e^2 / m_e)^{1/2}$, и потому для них можно уже считать $\epsilon(i|\xi_s|) = 1$, т. е. поляризация плазмы отсутствует и \mathcal{P} мало.

Формула (85,21) выражена через термодинамические переменные T, V, μ_a . Поэтому термодинамический потенциал Ω плазмы может быть найден прямым интегрированием равенства

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial e^2} \right)_{T, V, \mu_a} = \frac{1}{e^2} \langle \hat{V} \rangle \quad (85,22)$$

(см. V (80,4)). В результате найдем для корреляционной части Ω следующее выражение (обычные единицы):

$$\Omega_{\text{кор}} = -\frac{VT\kappa^3}{12\pi} = -\frac{2\sqrt{\pi}VT e^3}{3} \left[\sum_a z_a^2 \left(\frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \right)_{V, T} \right]^{3/2} \quad (85,23)$$

(А. А. Ведынов, 1959). Согласно общей теореме о малых добавках, эта же формула, выраженная через другие термодинамические переменные, дает поправку к другим термодинамическим потенциалам.

Для невырожденной плазмы все производные $\partial n_a / \partial \mu_a = n_a / T$, и тогда (85,23) переходит в формулу

$$F_{\text{кор}} = -\frac{2\sqrt{\pi}V e^3}{3\sqrt{T}} \left(\sum_a z_a^2 n_a \right)^{3/2} \quad (85,24)$$

для поправки к свободной энергии, совпадающую с V (78,12).

В случае сильного вырождения электронов в плазме ($T \ll \mu_e$) производная $\partial n_e / \partial \mu_e \sim n_e / \mu_e \ll n_e / T$. В сумме по a в (85,23) можно тогда вообще пренебречь электронным членом, и мы снова получаем формулу (85,24) с той лишь разницей, что сумма в ней берется лишь по сортам ионов в плазме. Таким образом, при сильном вырождении электроны вообще не влияют на радиус экранирования и на корреляционную часть термодинамических величин плазмы.