

где $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$, $\hbar\omega = \varepsilon - \varepsilon'$, а $\delta n_{fi}(t, \mathbf{r})$ — матричный элемент по отношению к волновым функциям жидкости. Подставив это выражение в dw_{fi} , просуммируем вероятность перехода по всем возможным конечным состояниям жидкости. При этом квадрат модуля интеграла записываем в виде двойного интеграла (по $dt dt' d^3x d^3x'$) и замечаем, что

$$\sum_f \delta n_{fi}(t, \mathbf{r}) \delta n_{fi}(t', \mathbf{r}')^* = \sum_f \delta n_{if}(t', \mathbf{r}') \delta n_{fi}(t, \mathbf{r}) = \langle i | \delta \hat{n}(t', \mathbf{r}') \delta \hat{n}(t, \mathbf{r}) | i \rangle = \bar{n} \sigma(t' - t, \mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

(причем σ выражено в функции от полной энергии жидкости в состоянии i). Интегрирование по $d(t' - t) d^3(x' - x)$ дает $\sigma(\omega, \mathbf{k})$, а еще одно интегрирование (скажем, по $dt d^3x$) дает просто объем V и полный интервал времени t . Опустив множитель t , получим в результате вероятность рассеяния в единицу времени

$$\omega = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{M^2} n a^2 \sigma(\omega, \mathbf{k}) \frac{d^3 p'}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (3)$$

Это выражение остается, конечно, справедливым и после усреднения по распределению Гиббса, т. е. при формфакторе, выраженном через температуру.

Отметим, что свойство формфактора (86,16) в применении к рассеянию нейтронов выражает собой тот факт, что при $T=0$ жидкость может только приобретать, но не отдавать энергию. Соотношение же (86,14) выражает собой принцип детального равновесия, так как процессы рассеяния с передачей энергии и импульса (ω, \mathbf{k}) и $(-\omega, -\mathbf{k})$ являются взаимно обратными.

§ 87. Правила сумм для формфактора

Динамический формфактор удовлетворяет определенным интегральным (по частотам ω) соотношениям — *правилам сумм*.

Вывод одного из них основан на правиле коммутации между операторами $\hat{n}_{\mathbf{k}}(t)$ и $\hat{n}_{\mathbf{k}}^+(t)$. Коммутатор гейзенберговских операторов, взятых в одинаковый момент времени, совпадает с коммутатором шредингеровских операторов $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{n}_{\mathbf{k}}^+$. Оператор $\hat{n}_{\mathbf{k}}$ определяется выражением (86,9) и требуемый коммутатор дается формулой

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}}^+ - \hat{n}_{\mathbf{k}}^+ \hat{n}_{\mathbf{k}} = -\frac{i\hbar}{m} k^2 N, \quad (87,1)$$

где m — масса частицы жидкости¹⁾.

Исходим из выражения компоненты фурье-разложения функции $\sigma(t, \mathbf{r})$ только по координатам

$$\bar{n} \sigma(t, \mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \langle \delta \hat{n}(t_1, \mathbf{r}_1) \delta \hat{n}(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle d^3(x_1 - x_2)'$$

¹⁾ Вычисление этого коммутатора совпадает с вычислением, произведенным в III § 149 в связи с выводом правила сумм (149,5); вместо числа электронов Z теперь фигурирует полное число частиц жидкости N .

Имея в виду, что подинтегральное выражение зависит только от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, заменяем интегрирование по $d^3(x_1 - x_2)$ интегрированием по $d^3x_1 d^3x_2/V$; произведя его под знаком усреднения, получим

$$\sigma(t, k) = \frac{1}{N} \langle \delta \hat{n}_k(t_1) \delta \hat{n}_{-k}(t_2) \rangle. \quad (87,2)$$

Вычислим значение производной $\partial \sigma(t, k)/\partial t$ при $t=0$. Поскольку $\sigma(t, k)$ зависит только от разности $t = t_1 - t_2$, то

$$\frac{\partial \sigma(t, k)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t_1} - \frac{\partial \sigma}{\partial t_2} \right)$$

и после подстановки сюда (87,2)

$$\frac{\partial \sigma(t, k)}{\partial t} = \frac{1}{2N} \langle \delta \hat{n}_k(t_1) \delta \hat{n}_{-k}(t_2) - \delta \hat{n}_k(t_1) \delta \hat{n}_{-k}(t_2) \rangle.$$

Каждый из двух членов этого выражения зависит только от абсолютной величины вектора \mathbf{k} ; на этом основании заменим во втором члене \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$. Положив затем $t_1 = t_2$ и учтя, что $\hat{n}_{-\mathbf{k}} = \hat{n}_{\mathbf{k}}^\dagger$, найдем, что разность в угловых скобках совпадает с коммутатором (87,1). Таким образом, находим

$$\left. \frac{\partial \sigma(t, k)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\frac{i\hbar}{2m} k^2.$$

С другой стороны, представив $\sigma(t, k)$ в виде фурье-интеграла по частотам, имеем

$$\left. \frac{\partial \sigma(t, k)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi} \Big|_{t=0} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega \sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Сравнив оба выражения производной, получим искомое соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega \sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (87,3)$$

(G. Placzek, 1952). Подчеркнем, что оно справедливо при любых k . Для перехода в этом соотношении к классическому пределу ($\hbar \rightarrow 0$) надо записать интеграл в его левой стороне в виде

$$\int_0^{\infty} \omega [\sigma(\omega, k) - \sigma(-\omega, k)] \frac{d\omega}{2\pi}$$

и, согласно (86,14), подставить в него

$$\sigma(\omega, k) - \sigma(-\omega, k) \approx \frac{\hbar \omega}{T} \sigma(\omega, k).$$

После этого множители \hbar в обеих сторонах равенства сокращаются и остается

$$\int_0^{\infty} \omega^2 \sigma(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi} = T \frac{k^2}{2m}.$$

Применим формулу (87,3) к бозе-жидкости при $T=0$ и рассмотрим область малых значений k . При $k \rightarrow 0$ главный вклад в интеграл дает δ -функциональный пик в формфакторе $\sigma(\omega, k)$, возникающий в (86,13) от переходов с рождением одного фонона (поскольку в основном состоянии жидкости фононы отсутствуют, то переходов с уничтожением фонона при $T=0$ нет). Этот член имеет вид $A\delta(\omega - uk)$, где $\hbar uk$ — энергия фонона (u — скорость звука). Подставив же его в качестве $\sigma(\omega, k)$ в (87,3), найдем коэффициент A , и в результате

$$\sigma(\omega, k) = \frac{\pi \hbar k}{mu} \delta(\omega - uk). \quad (87,4)$$

Интегрирование этого выражения по формуле (86,7) дает статический формфактор

$$\sigma(k) = \frac{\hbar k}{2mu} \quad (87,5)$$

(*R. P. Feynman*, 1954)¹). Поскольку эта формула относится к области малых значений k , то ее фурье-обращение дает асимптотическое выражение корреляционной функции при больших r :

$$\nu(r) = -\frac{\hbar}{2\pi^2 m u r^4} \quad (87,6)$$

(для проверки этой формулы см. интеграл, приведенный в примечании на стр. 411). При $T=0$ формула (87,6) справедлива до сколь угодно больших расстояний. При низких, но конечных температурах она верна вплоть до расстояний $r \sim \hbar u/T$, на которых флуктуации перестают быть чисто квантовыми. На еще больших расстояниях закон (87,6) сменяется экспоненциаль-

¹) Формула (87,5), записанная в виде $\sigma(k) = \hbar^2 k^2 / 2m \epsilon(k)$ ($\epsilon(k)$ — энергия квазичастицы), строго справедлива лишь при $k \rightarrow 0$. При увеличении k все большую роль играют вклады в $\sigma(k)$ от переходов с рождением нескольких квазичастиц. Если все же пренебречь этим вкладом, можно считать, что эта формула дает связь между формфактором и энергией квазичастиц в бозе-жидкости. При этом максимуму, который σ имеет при $k \sim 1/a$ (a — межатомные расстояния в жидкости), отвечает «ротонный» минимум на кривой $\epsilon(k)$.

ным убыванием (если отвлечься от вклада ван-дер-ваальсовых сил — см. § 83)¹⁾.

Еще одно правило сумм можно получить из установленной в § 86 связи формфактора с некоторой обобщенной восприимчивостью $\alpha(\omega, k)$. Эта связь дается формулой (86,20), которая при $T=0$ сводится (для $\omega > 0$) к

$$\bar{n}\sigma(\omega, k) = 2\hbar \operatorname{Im} \alpha(\omega, k). \quad (87,7)$$

Согласно формулам Крамерса—Кронига (см. V (123,15)),

$$\operatorname{Re} \alpha(\omega, k) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \alpha(\omega', k)}{\omega' - \omega} d\omega'.$$

Положив здесь $\omega = 0$ и учтя, что величина $\alpha(0, k)$ вещественна²⁾, пишем

$$\alpha(0, k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \alpha(\omega, k) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (87,8)$$

В пределе $k \rightarrow 0$ имеет место соотношение

$$\alpha(0, k \rightarrow 0) = \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu} \right)_{T=0} = \bar{n} \left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial P} \right)_{T=0}. \quad (87,9)$$

Оно следует из того, что в статическом медленно меняющемся в пространстве слабом поле U имеет место условие равновесия $\mu + U = \text{const}$, так что включение внешнего поля эквивалентно изменению химического потенциала на $-U$. В пределе $k \rightarrow 0$ имеем поэтому из (86,18)

$$\delta \bar{n} = - \frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu} U \approx - U \int \alpha(0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d^3(x_1 - x_2) = - U \alpha(0, k=0),$$

откуда и следует (87,9).

Собирая полученные формулы (87,7—9), найдем, таким образом, следующее правило сумм для формфактора жидкости

¹⁾ Корреляционная функция (87,6) отрицательна (что соответствует отталкиванию между частицами) в противоположность корреляционной функции идеального бозе-газа, где она положительна (см. V § 117). В связи с этим напомним (§ 25), что в слабо неидеальном бозе-газе энергетический спектр имеет фононный вид лишь при $k \ll mu/\hbar$ (причем $\hbar/mu \gg a$). Соответствующие расстояния $r \sim 1/k \gg \hbar/mu$, так что при переходе к идеальному газу ($u \rightarrow 0$) область применимости формулы (87,6) отодвигается на бесконечность.

²⁾ Величина $\alpha(\omega=0, \mathbf{r})$ вещественна в силу общих свойств обобщенной восприимчивости. Вещественность фурье-компоненты $\alpha(\omega=0, \mathbf{k})$ следует отсюда ввиду четности функции $\alpha(\omega, \mathbf{r})$ по \mathbf{r} .

при $T = 0$:

$$\frac{1}{\pi\hbar} \int_0^{\infty} \sigma(\omega, k \rightarrow 0) \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\bar{n}}{\partial P} \quad (87,10)$$

(D. Pines, Ph. Nozières, 1958).

Задача

Найти корреляционную функцию $v(r)$ в бозе-жидкости на расстояниях $r \geq \hbar u/T$ при температурах $T \ll T_\lambda$.

Решение. Искомая корреляционная функция определяется формфактором при значениях $k \sim 1/r \ll T/\hbar u \ll 1/a$, для которых энергетический спектр жидкости — фононный. При $T \neq 0$ в $\sigma(\omega, k)$ имеется член с $\delta(\omega + ku)$, отвечающий поглощению фонона, наряду с членом с $\delta(\omega - ku)$, отвечающим испусканию фонона. Коэффициенты в этих членах можно определить с помощью (86,14) и (87,3):

$$\sigma(\omega, k) = \frac{\pi\hbar k}{mu} [1 - e^{-\hbar ku/T}]^{-1} \{ \delta(\omega - ku) + e^{-\hbar ku/T} \delta(\omega + ku) \}. \quad (1)$$

Интегрируя это выражение, находим

$$\sigma(k) = \frac{\hbar k}{2mu} \operatorname{cth} \frac{\hbar ku}{2T} \quad (2)$$

и затем

$$v(r) = \int e^{ikr} \sigma(k) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\hbar}{8\pi^2 i m u r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} k^2 \operatorname{cth} \frac{\hbar ku}{2T} dk.$$

Замыкая путь интегрирования по dk бесконечно удаленной полуокружностью в верхней полуплоскости комплексного k , сводим интеграл к сумме вычетов в полюсах (расположенных на мнимой оси). При $r \gg \hbar u/T$ главный вклад в интеграл возникает от вычета в полюсе при $\hbar ku/2T = i\pi$:

$$v(r) = -\frac{2\pi T^3}{mu^4 \hbar^2 r} \exp\left(-\frac{2\pi T}{\hbar u} r\right). \quad (3)$$

При условии $aT/\hbar u \ll 1$ характерное расстояние затухания функции $v(r)$ оказывается много большим межатомных расстояний, на которых убывают эффекты, связанные с прямым взаимодействием между атомами. При этом в формулу (3) существенно входит \hbar , так что описываемая ею корреляция имеет квантовый характер. Отметим, что при выводе мы пренебрегали вкладом вандер-ваальсовых сил. Как следует из результатов § 83, этот вклад имеет степенной характер и является главным на достаточно больших расстояниях. Расстояния, на которых происходит переход от (3) к (83,16), зависят от конкретного соотношения между коэффициентами, но область применимости формулы (3) всегда имеется при достаточно низких температурах, поскольку на границе области применимости при $r \sim \hbar u/T$, согласно (3), $v \sim T^4$, а согласно (83,16), $v \sim T^2$.