§ 88. Гидродинамические флуктуации

В предыдущих параграфах мы рассматривали флуктуации плотности жидкости при произвольных частотах ω и волновых векторах $\mathbf{k}$. При этом, разумеется, конкретный вид корреляционной функции не мог быть найден в общем случае. Это можно, однако, сделать в гидродинамическом пределе, когда длина волны флуктуаций велика по сравнению с характерными микроскопическими размерами (межатомными расстояниями в жидкости, длиной свободного пробега в газе).

Вычисление одновременных корреляционных функций флуктуаций плотности, температуры, скорости и т. п. в неподвижной жидкости не требует особого исследования: эти флуктуации (в классическом, т. е. неквантовом пределе) описываются обычными термодинамическими формулами, справедливыми для любой среды, находящейся в тепловом равновесии. Корреляции между одновременными флуктуациями в различных точках пространства распространяются на длины порядка величины межатомных расстояний (при этом мы пренебрегаем слабыми дальнодействующими ван-дер-ваальсовыми силами). Но эти расстояния рассматриваются в гидродинамике как бесконечно малые. Поэтому в гидродинамическом пределе одновременные флуктуации в различных точках не коррелированы. Формально это утверждение следует из аддитивности термодинамической величины — минимальной работы $R_{\min}$, требуемой для осуществления флуктуации. Поскольку вероятность флуктуации пропорциональна $\exp(-R_{\min}/T)$, то, представив $R_{\min}$ в виде суммы членов, относящихся к отдельным физически бесконечно малым объемам, мы найдем, что вероятности флуктуаций в этих объемах независимы друг от друга.

Имея в виду эту независимость, можно сразу переписать известные формулы для средних квадратов флуктуаций термодинамических величин в заданной точке пространства (см. V § 112) в виде формул для корреляционных функций. Так, согласно формуле

$$\langle(\delta T)^2\rangle = \frac{T^2}{\rho c_v V}$$

для флуктуаций температуры в объеме V (ρ — плотность; c_v — теплоемкость, отнесенная к единице массы среды) пишем сначала

$$\langle\delta T(\mathbf{r}_a)\,\delta T(\mathbf{r}_b)\rangle = \frac{T^2}{\rho c_v V_a}\delta_{ab},$$

где флуктуации относятся к двум малым объемам V_a и V_b.

Устремив затем величину объемов к нулю, получим[1])

$$\langle \delta T(\mathbf{r}_1)\, \delta T(\mathbf{r}_2)\rangle = \frac{T^2}{\rho c_v}\, \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{88,1}$$

Аналогичным образом записываются формулы для флуктуаций других термодинамических величин:

$$\langle \delta\rho(\mathbf{r}_1)\, \delta\rho(\mathbf{r}_2)\rangle = \rho T \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2), \tag{88,2}$$

$$\langle \delta P(\mathbf{r}_1)\, \delta P(\mathbf{r}_2)\rangle = \rho T \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) = \rho T u^2 \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2), \tag{88,3}$$

$$\langle \delta s(\mathbf{r}_1)\, \delta s(\mathbf{r}_2)\rangle = \frac{c_p}{\rho}\, \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \tag{88,4}$$

(P—давление; s—энтропия единицы массы среды); при этом флуктуации пар величин ρ, T и P, s независимы. Выпишем также формулу для флуктуаций макроскопической скорости жидкости $\mathbf{v}$ (равной нулю в равновесии):

$$\langle \delta v_i(\mathbf{r}_1)\, \delta v_k(\mathbf{r}_2)\rangle = \frac{T}{\rho}\, \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{88,5}$$

Специфичным для гидродинамики является вопрос о временных корреляциях флуктуаций, а также вопрос о флуктуациях в движущейся жидкости. Решение этих вопросов требует учета диссипативных процессов в жидкости—вязкости и теплопроводности.

Построение общей теории флуктуационных явлений в гидродинамике сводится к составлению «уравнений движения» для флуктуирующих величин. Это может быть сделано путем введения соответствующих дополнительных членов в гидродинамические уравнения (*Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, 1957).

Уравнения гидродинамики, написанные в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{88,6}$$

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{88,7}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) = \frac{1}{2}\sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) - \operatorname{div}\mathbf{q} \tag{88,8}$$

[1]) Эта и следующие формулы для одновременных корреляций в случае газов справедливы для флуктуаций с длинами волн, большими лишь по сравнению с межмолекулярными расстояниями, но не обязательно большими по сравнению с длиной пробега. Последнее условие требуется, однако, для разновременных корреляционных функций в гидродинамическом приближении (поскольку микроскопический механизм распространения возмущений в газах определяется именно длиной пробега частиц).

без спецификации вида тензора напряжений σ'_{ik} и вектора потока тепла $\mathbf{q}$, выражают собой просто сохранение массы, импульса и энергии. Поэтому в такой форме они справедливы для любого движения, в том числе для флуктуационных изменений состояния жидкости. При этом под ρ, P, $\mathbf{v}$ надо понимать сумму значений величин ρ_0, P_0, $\mathbf{v}_0$, ... в основном движении и их флуктуационных колебаний $\delta\rho$, δP, $\delta\mathbf{v}$, ... (по последним, конечно, уравнения всегда могут быть линеаризованы).

Обычные выражения для тензора напряжений и потока тепла связывают их соответственно с градиентами скорости и градиентом температуры. При флуктуациях в жидкости возникают также местные спонтанные напряжения и потоки тепла, не связанные с указанными градиентами; обозначим их посредством s_{ik} и $\mathbf{g}$ и будем называть «случайными». Таким образом, пишем

$$\sigma'_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\,\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)+\zeta\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}+s_{ik}, \qquad (88,9)$$

$$\mathbf{q}=-\varkappa\nabla T+\mathbf{g} \qquad (88,10)$$

(η, ζ — коэффициенты вязкости; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности).

Задача заключается теперь в установлении свойств s_{ik} и $\mathbf{g}$ — в определении их корреляционных функций. Для простоты проведем все рассуждения для естественного в гидродинамике случая неквантовых флуктуаций; это значит, что частоты флуктуационных колебаний предполагаются удовлетворяющими условию $\hbar\omega \ll T$. При этом коэффициенты вязкости и теплопроводности будем считать не диспергирующими, т. е. не зависящими от частоты колебаний.

В общей теории флуктуаций (изложенной в V §§ 119—122) рассматривается дискретный ряд флуктуирующих величин x_1, x_2, ..., между тем как здесь мы имеем дело с непрерывным рядом (значения ρ, P, ... в каждой точке жидкости). Это несущественное затруднение мы обойдем, разделив объем тела на малые, но конечные участки ΔV и рассматривая некоторые средние значения величин в каждом из них; переход к бесконечно малым элементам произведем в окончательных формулах.

Будем рассматривать формулы (88,9—10) в качестве уравнений

$$\dot{x}_a=-\sum_b \gamma_{ab}X_b+y_b \qquad (88,11)$$

общей теории квазистационарных флуктуаций (см. V (122,20)), причем в качестве величин $\dot{x}_a$ выберем значения компонент тензора σ'_{ik} и вектора $\mathbf{q}$ в каждом из участков ΔV; тогда величинами y_a являются s_{ik} и $\mathbf{g}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &\longrightarrow \sigma'_{ik},\ q_i, \\ y_a &\longrightarrow s_{ik},\ g_i. \end{aligned} \tag{88,12}$$

Смысл же термодинамически взаимных величин X_a выясняется путем привлечения формулы для скорости изменения полной энтропии жидкости S. Обычным путем (ср. VI § 49) с помощью уравнений (88,8—10) находим

$$\dot{S} = \int \left\{ \frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q}\nabla T}{T^2} \right\} dV. \tag{88,13}$$

Заменив этот интеграл суммой по участкам ΔV и сравнив его затем с выражением

$$\dot{S} = -\sum_a \dot{x}_a X_a,$$

найдем, что

$$X_a \longrightarrow -\frac{1}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \Delta V,\quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \Delta V. \tag{88,14}$$

Теперь легко найти коэффициенты γ_{ab}, непосредственно определяющие искомые корреляции согласно формулам

$$\langle y_a(t_1)\, y_b(t_2) \rangle = (\gamma_{ab} + \gamma_{ba})\, \delta(t_1 - t_2) \tag{88,15}$$

(см. V (122, 21а)).

Прежде всего замечаем, что в формулах (88,9—10) нет членов, которые связали бы σ'_{ik} с градиентом температуры, а $\mathbf{q}$ — с градиентами скоростей. Это значит, что соответствующие коэффициенты $\gamma_{ab} = 0$ и в силу (88,15) имеем

$$\langle s_{ik}(t_1, \mathbf{r}_1)\, g_l(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = 0, \tag{88,16}$$

т. е. значения s_{ik} и $\mathbf{g}$ вообще не коррелированы друг с другом.

Далее, коэффициенты, связывающие значения q_i со значениями $(\Delta V/T^2)\,\partial T/\partial x_i$, равны нулю, если эти величины взяты в разных участках ΔV, и равны $\gamma_{ik} = \varkappa T^2 \delta_{ik}/\Delta V$, если они берутся в одном и том же участке. С этими значениями γ_{ab} по формуле (88,15) получим после перехода к пределу $\Delta V \longrightarrow 0$:

$$\langle g_i(t_1, \mathbf{r}_1)\, g_k(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = 2\varkappa T^2 \delta_{ik} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \delta(t_1 - t_2). \tag{88,17}$$

Аналогичным образом получаются формулы для корреляционных функций случайного тензора напряжений

$$\langle s_{ik}(t_1, \mathbf{r}_1)\, s_{lm}(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = \\ = 2T \left[\eta (\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + \left(\zeta - \frac{2\eta}{3} \right) \delta_{ik}\delta_{lm} \right] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(t_1 - t_2). \tag{88,18}$$

Формулы (88,16—18) решают, в принципе, поставленный вопрос о вычислении гидродинамических флуктуаций в любом конкретном случае. Ход решения задач при этом таков. Рассматривая s_{ik} и g как заданные функции координат и времени, решаем формально линеаризованные уравнения (88,6—8) относительно величин $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, ..., учитывая при этом необходимые гидродинамические граничные условия. В результате получим эти величины, выраженные в виде некоторых линейных функционалов от s_{ik}, g. Соответственно любая квадратичная по $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, ... величина выражается через квадратичные функционалы от s_{ik}, g, после чего их среднее значение вычисляется с помощью формул (88,16—18), и вспомогательные величины s_{ik}, g выпадают из ответа.

Выпишем формулы (88,16—18) также и в фурье-компонентах по частотам, причем сделаем это сразу в виде, обобщающем формулы на случай квантовых флуктуаций. Согласно общим правилам флуктуационно-диссипационной теоремы, такое обобщение достигается путем введения дополнительного множителя $(\hbar\omega/2T)\operatorname{cth}(\hbar\omega/2T)$ (обращающегося в единицу в классическом случае, $\hbar\omega \ll T$). При наличии дисперсии вязкости и теплопроводности величины η, ζ, $\varkappa$ являются комплексными функциями частоты; при этом в формулах для флуктуаций η, ζ, $\varkappa$ заменяются вещественными частями этих функций:

$$(s_{ik}^{(1)} g_l^{(2)})_\omega = 0, \tag{88,19}$$

$$(g_l^{(1)} g_k^{(2)})_\omega = \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\hbar\omega T \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} \cdot \operatorname{Re}\varkappa(\omega), \tag{88,20}$$

$$(s_{ik}^{(1)} s_{lm}^{(2)})_\omega = \hbar\omega\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} \times$$
$$\times\left[\left(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}\right)\operatorname{Re}\eta(\omega) + \delta_{ik}\delta_{lm}\operatorname{Re}\zeta(\omega)\right]. \tag{88,21}$$

§ 89. Гидродинамические флуктуации в неограниченной среде

В этом параграфе мы рассмотрим гидродинамические флуктуации в неограниченной неподвижной жидкости. Эта задача может быть, конечно, решена изложенным в предыдущем параграфе методом. Мы, однако, сделаем это здесь другим способом, проиллюстрировав тем самым альтернативный метод решения задач о гидродинамических флуктуациях.

Этот метод использует общую теорию квазистационарных флуктуаций в ее более ранней стадии, до введения случайных сил. Напомним относящиеся сюда общие формулы (см. V § 122).