Формулы (88,16—18) решают, в принципе, поставленный вопрос о вычислении гидродинамических флуктуаций в любом конкретном случае. Ход решения задач при этом таков. Рассматривая s_{ik} и g как заданные функции координат и времени, решаем формально линеаризованные уравнения (88,6—8) относительно величин $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, ..., учитывая при этом необходимые гидродинамические граничные условия. В результате получим эти величины, выраженные в виде некоторых линейных функционалов от s_{ik}, g. Соответственно любая квадратичная по $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, ... величина выражается через квадратичные функционалы от s_{ik}, g, после чего их среднее значение вычисляется с помощью формул (88,16—18), и вспомогательные величины s_{ik}, g выпадают из ответа.

Выпишем формулы (88,16—18) также и в фурье-компонентах по частотам, причем сделаем это сразу в виде, обобщающем формулы на случай квантовых флуктуаций. Согласно общим правилам флуктуационно-диссипационной теоремы, такое обобщение достигается путем введения дополнительного множителя $(\hbar\omega/2T)\operatorname{cth}(\hbar\omega/2T)$ (обращающегося в единицу в классическом случае, $\hbar\omega \ll T$). При наличии дисперсии вязкости и теплопроводности величины η, ζ, $\varkappa$ являются комплексными функциями частоты; при этом в формулах для флуктуаций η, ζ, $\varkappa$ заменяются вещественными частями этих функций:

$$(s_{ik}^{(1)}g_l^{(2)})_\omega = 0, \tag{88,19}$$

$$(g_i^{(1)}g_k^{(2)})_\omega = \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\hbar\omega T \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\cdot \operatorname{Re}\varkappa(\omega), \tag{88,20}$$

$$(s_{ik}^{(1)}s_{lm}^{(2)})_\omega = \hbar\omega\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\times$$
$$\times\left[\left(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}\right)\operatorname{Re}\eta(\omega)+\delta_{ik}\delta_{lm}\operatorname{Re}\zeta(\omega)\right]. \tag{88,21}$$

§ 89. Гидродинамические флуктуации в неограниченной среде

В этом параграфе мы рассмотрим гидродинамические флуктуации в неограниченной неподвижной жидкости. Эта задача может быть, конечно, решена изложенным в предыдущем параграфе методом. Мы, однако, сделаем это здесь другим способом, проиллюстрировав тем самым альтернативный метод решения задач о гидродинамических флуктуациях.

Этот метод использует общую теорию квазистационарных флуктуаций в ее более ранней стадии, до введения случайных сил. Напомним относящиеся сюда общие формулы (см. V § 122).

Пусть

$$\dot{x}_a = -\sum_b \lambda_{ab} x_b \tag{89,1}$$

— макроскопические «уравнения движения» для набора величин $x_a(t)$, описывающих неравновесное состояние системы (в равновесии все $x_a=0$); эти уравнения справедливы, если величины x_a велики по сравнению с их средними флуктуациями (но в то же время настолько малы, чтобы была допустима линеаризация уравнений движения). Тогда можно утверждать, что таким же уравнениям удовлетворяют (при $t>0$) корреляционные функции флуктуаций

$$\frac{d}{dt}\langle x_a(t)\,x_c(0)\rangle = -\sum_b \lambda_{ab}\langle x_b(t)\,x_c(0)\rangle, \qquad t>0. \tag{89,2}$$

Начальным условием к этим уравнениям служат равенства

$$\langle x_a(t)\,x_c(0)\rangle\,|_{t=+0} = \langle x_a x_c\rangle, \tag{89,3}$$

где $\langle x_a x_c\rangle$ — одновременная корреляционная функция, предполагаемая известной. В область $t<0$ корреляционные функции продолжаются по правилу

$$\langle x_a(t)\,x_c(0)\rangle = \pm\langle x_a(-t)\,x_c(0)\rangle, \tag{89,4}$$

причем верхний знак относится к случаю, когда обе величины x_a и x_c четны (или обе нечетны) по отношению к обращению времени, а нижний знак — к случаю, когда одна из величин четна, а другая нечетна. Решение уравнения (89,2) с условием (89,3) осуществляется путем одностороннего преобразования Фурье: умножив уравнение на $e^{i\omega t}$ и проинтегрировав по t в пределах от 0 до ∞ (причем интеграл в левой стороне уравнения преобразуется по частям), получим систему уравнений

$$-i\omega\,(x_a x_c)^{(+)}_\omega = -\sum_b \lambda_{ab}\,(x_b x_c)^{(+)}_\omega + \langle x_a x_c\rangle \tag{89,5}$$

для величин (функций частоты)

$$(x_a x_b)^{(+)}_\omega = \int_0^\infty e^{i\omega t}\langle x_a(t)\,x_b(0)\rangle\,dt. \tag{89,6}$$

Обычные же фурье-компоненты корреляционной функции выражаются через величины (89,6) согласно

$$(x_a x_b)_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\langle x_a(t)\,x_b(0)\rangle\,dt =$$

$$= (x_a x_b)^{(+)}_\omega \pm \left[(x_a x_b)^{(+)}_\omega\right]^* = (x_a x_b)^{(+)}_\omega + (x_b x_a)^{(+)}_{-\omega}, \tag{89,7}$$

где знаки $\pm$ отвечают знакам в (89,4).

Переходя к поставленной задаче о флуктуациях в неподвижной жидкости, прежде всего линеаризуем гидродинамические уравнения (88,6—8) с σ'_{ik} и $\mathbf{q}$ из (88,9—10) (без последних членов). Положив $\rho=\rho_0+\delta\rho$, $\mathbf{v}=\delta\mathbf{v}$, ... и отбрасывая нелинейные члены, получим

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{89,8}$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla\delta P+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}, \tag{89,9}$$

$$\frac{\partial\delta s}{\partial t}=\frac{\varkappa}{\rho T}\Delta\delta T \tag{89,10}$$

(после линеаризации индекс 0 у постоянных величин ρ_0, ... отбрасываем). В уравнениях (89,8—10) будет удобным сразу разделить скорость на потенциальную («продольную») и вихревую («поперечную») части $\mathbf{v}^{(l)}$ и $\mathbf{v}^{(t)}$ согласно определению

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^{(l)}+\mathbf{v}^{(t)}, \tag{89,11}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}^{(t)}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}^{(l)}=0.$$

В (89,8) остается только продольная скорость:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}^{(l)}=0, \tag{89,12}$$

а (89,9), распадается на два уравнения

$$\frac{\partial\mathbf{v}^{(t)}}{\partial t}=\frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}^{(t)}, \tag{89,13}$$

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}^{(l)}}{\partial t}=-\nabla\delta P+\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}^{(l)}. \tag{89,14}$$

Уравнение для поперечной скорости независимо от остальных уравнений. Соответственно этому, и для корреляционной функции ее флуктуаций имеем одно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_i^{(t)}(t,\ \mathbf{r})\,v_k^{(t)}(0,\ 0)\rangle-\nu\Delta\langle v_i^{(t)}(t,\ \mathbf{r})\,v_k^{(t)}(0,\ 0)\rangle=0 \tag{89,15}$$

(где $\nu=\eta/\rho$ — кинематическая вязкость). Подвергнув его одностороннему преобразованию Фурье, получим

$$-i\omega\,(v_i^{(t)}(\mathbf{r})\,v_k^{(t)}(0))_\omega^{(+)}-\nu\Delta\,(v_i^{(t)}(\mathbf{r})\,v_k^{(t)}(0))_\omega^{(+)}=\langle v_i^{(t)}(\mathbf{r})\,v_k^{(t)}(0)\rangle$$

(где справа стоит одновременная корреляционная функция), или, переходя к фурье-компонентам по координатам:

$$(v_i^{(t)}v_k^{(t)})_{\omega\mathbf{k}}=\frac{(v_i^{(t)}v_k^{(t)})_\mathbf{k}}{\nu k^2-i\omega}.$$

Одновременная корреляционная функция флуктуаций скорости дается формулой (88,5); перейдя в ней к фурье-компонентам и отделив поперечную часть, имеем

$$(v_i^{(t)}v_k^{(t)})_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\rho}\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right). \qquad (89,16)$$

Подставив это в предыдущую формулу, окончательно получим¹)

$$(v_i^{(t)}v_k^{(t)})_{\omega\mathbf{k}} = 2\,\mathrm{Re}\,(v_i^{(t)}v_k^{(t)})^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2T}{\rho}\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right)\frac{\nu k^2}{\omega^2+\nu^2k^4}. \qquad (89,17)$$

Для остальных переменных имеем систему связанных друг с другом уравнений (89,10), (89,12), (89,14). Эта система, однако, упрощается в предельных случаях больших или малых частот. Дело в том, что возмущения продольной скорости и давления распространяются в жидкости со скоростью звука u, а возмущения энтропии — согласно уравнению теплопроводности. Последний механизм требует времени $\sim 1/\chi k^2$ для распространения возмущения на расстояние $\sim 1/k$ ($\chi = \varkappa/\rho c_p$ — температуропроводность среды). Поэтому для частот, удовлетворяющих (при заданном значении волнового вектора) условию

$$\chi k^2 \ll \omega \sim ku, \qquad (89,18)$$

можно считать, что флуктуируют только $\mathbf{v}^{(l)}$ и P при постоянной энтропии. Напротив, при

$$\chi k^2 \sim \omega \ll ku \qquad (89,19)$$

происходят изобарические флуктуации энтропии²).

Рассмотрим сначала первую, высокочастотную область (89,18) и определим, например, флуктуации давления.

Уравнение (89,14), переписанное для корреляционных функций, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{v}^{(l)}(t,\mathbf{r})\,\delta P(0,0)\rangle = -\mathrm{grad}\,\langle \delta P(t,\mathbf{r})\,\delta P(0,0)\rangle + \left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\langle \mathbf{v}^{(l)}(t,\mathbf{r})\,\delta P(0,0)\rangle,$$

а начальным условием к нему служит равенство нулю одновременной корреляции $\mathbf{v}^{(l)}$ и δP. Произведя одностороннее преобразование Фурье по времени и полное преобразование по

¹) Легко видеть, что путем интегрирования выражения (89,17) по $d\omega/2\pi$ мы вернемся, как и следовало, к одновременной корреляционной функции.

²) Неравенство $\chi k^2 \ll ku$ выполняется в гидродинамической области всегда. Так, в газах $u \sim v_T$ и $\chi \sim v_T l$, где v_T — средняя тепловая скорость частиц, а l — их длина пробега. Поэтому неравенство $\chi k \ll u$ эквивалентно обязательному условию $kl \ll 1$.

координатам, получим отсюда

$$-i\omega\rho(\mathbf{v}^{(l)}\delta P)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}(\delta P^2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} - \left(\zeta + \frac{4\eta}{3}\right)\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v}^{(l)}\delta P)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}. \quad (89{,}20)$$

Далее, в уравнении (89,12) пишем

$$\delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s \delta P + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_P \delta s = \frac{1}{u^2}\delta P - \rho^2\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \delta s,$$

а $\partial\delta s/\partial t$ выражаем с помощью уравнения (89,10), написанного в виде

$$\frac{\partial\delta s}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s \Delta\delta P$$

(членом с $\Delta\delta s$ в правой стороне пренебрегаем по сравнению с $\partial\delta s/\partial t$ в силу условия $\chi k^2 \ll \omega$). Это приводит к уравнению

$$\frac{1}{u^2}\frac{\partial\delta P}{\partial t} - \frac{\varkappa\rho}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s^2 \Delta\delta P + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^{(l)} = 0.$$

Соответствующее уравнение для корреляционных функций снова получается отсюда заменой δP и $\mathbf{v}^{(l)}$ соответственно на $\langle\delta P(t, \mathbf{r})\,\delta P(0, 0)\rangle$ и $\langle\mathbf{v}^{(l)}(t, \mathbf{r})\,\delta P(0, 0)\rangle$, а начальным условием к нему служит (88,3). После фурье-преобразований это уравнение дает

$$\left[-\frac{i\omega}{u^2} + \frac{k^2\varkappa\rho}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s^2\right](\delta P^2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} + i\rho\,(\mathbf{k}\mathbf{v}^{(l)}\delta P)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \rho T. \quad (89{,}21)$$

Из двух уравнений (89,20—21) находим после некоторых преобразований

$$(\delta P^2)_{\omega\mathbf{k}} = 2\,\mathrm{Re}\,(\delta P^2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{k^2\rho T u^4(i + 2\gamma_T\omega/uk^2)}{\omega(\omega^2 - k^2u^2 + 2i\omega u\gamma)}, \quad (89{,}22)$$

где

$$\gamma = \frac{k^2}{2\rho u}\left[\zeta + \frac{4\eta}{3} + \frac{\varkappa u^2\rho^2}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s^2\right] \quad (89{,}23)$$

— коэффициент поглощения звука в среде (см. VI § 77), а γ_T — его часть, связанная с теплопроводностью. Выпишем окончательный ответ для области частот вблизи значений $\omega = \pm ku$, где флуктуации особенно велики:

$$(\delta P^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{\rho T u^3\gamma}{(\omega \mp ku)^2 + u^2\gamma^2} \quad (89{,}24)$$

Эта формула справедлива при $|\omega \mp ku| \ll u\gamma$ [1]).

[1]) Напомним (см. VI § 77), что гидродинамический коэффициент поглощения звука всегда мал в газах (неравенство $\gamma \ll k$ автоматически следует из условия $kl \ll 1$) и мал в жидкостях, в которых нет существенной дисперсии звука.

В низкочастотной области (89,19) достаточно рассмотреть, как уже было указано, флуктуации энтропии, пренебрегая при этом флуктуациями давления. Это значит, что в уравнении (89,10) можно положить

$$\delta T \approx \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_P \delta s = \frac{T}{c_p}\delta s$$

(теплоемкость c_p относится к единице массы). Поэтому для искомой корреляционной функции имеем уравнение того же типа, что и (89,15), а начальное условие к нему дается выражением (88,4). В результате найдем

$$(\delta s^2)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{2c_p}{\rho}\frac{\chi k^2}{\omega^2+\chi^2 k^4}. \qquad (89,25)$$

Задачи

1. Найти корреляционную функцию флуктуаций числа растворенных частиц в слабом растворе.

Решение. Плотность n числа растворенных частиц удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$$

(D — коэффициент диффузии). В слабом растворе одновременные значения плотности в различных точках пространства не коррелированы друг с другом (подобно отсутствию одновременной корреляции для плотности идеального газа); поэтому одновременная корреляционная функция

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_1)\,\delta n(\mathbf{r}_2)\rangle = \bar{n}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Аналогично формуле (89,25), находим

$$(\delta n^2)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{2\bar{n}k^2 D}{\omega^2+k^4 D}.$$

В этом решении мы пренебрегаем термодиффузией, вследствие чего флуктуации n могут рассматриваться независимо от флуктуаций температуры.

2. Найти корреляционную функцию флуктуаций давления в жидкости, обладающей большой диспергирующей второй вязкостью $\zeta(\omega)$ (связанной с медленной релаксацией некоторого параметра).

Решение. Наличие медленных процессов релаксации приводит к появлению второй вязкости вида

$$\zeta(\omega) = \frac{\tau\rho}{1-i\omega\tau}(u_\infty^2 - u_0^2),$$

где τ — время релаксации; u_0 — равновесная скорость звука; u_∞ — скорость звука при постоянном значении релаксационного параметра (см. VI § 78). Уравнения (89,20—21), а с ними и (89,22) справедливы также и при наличии дисперсии. Положив $\zeta = \zeta(\omega)$ и пренебрегая членами, происходящими от η и $\varkappa$, получим после вычисления

$$(\delta P^2)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{2T\tau\rho u_0^4 (u_\infty^2 - u_0^2)}{(u_0^2 - \omega^2/k^2)^2 + \omega^2\tau^2 (u_\infty^2 - \omega^2/k^2)^2}.$$