§ 90. Операторные выражения для кинетических коэффициентов

Полученным в § 88 формулам (88,20—21) можно придать новый аспект, прочтя их «справа налево», т. е. рассматривая их как выражения для коэффициентов теплопроводности и вязкости. При этом корреляционные функции в левых сторонах равенства можно выразить, согласно их определению, через операторы некоторых величин, имеющих микроскопический смысл; в результате через эти операторы оказываются выраженными кинетические коэффициенты жидкости.

Прежде всего надо учесть, что отсутствие корреляции между флуктуациями «случайных» потоков энергии и импульса в различных точках пространства (δ-функция $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ в формулах (88,20—21)) является следствием гидродинамического приближения; последнее справедливо лишь при малых значениях волнового вектора. Чтобы выразить это условие в явном виде, запишем формулы в компонентах фурье-разложения по пространственным координатам (что сводится к замене множителей $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ единицей) и перейдем к пределу $\mathbf{k}\to 0$. Так, формулу (88,20), свернутую по паре индексов i, k,

$$(\mathbf{g}^{(1)}\mathbf{g}^{(2)})_\omega = 3\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\hbar\omega T \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\cdot \operatorname{Re}\varkappa(\omega)$$

запишем в виде

$$\operatorname{Re}\varkappa(\omega) = \frac{1}{3\hbar\omega T}\operatorname{th}\frac{\hbar\omega}{2T}\lim_{\mathbf{k}\to 0}(\mathbf{g}^2)_{\omega\mathbf{k}}. \tag{90,1}$$

Легко видеть, что при такой записи можно заменить в этой формуле «случайный» поток тепла $\mathbf{g}$ на полный поток энергии, который обозначим через $\mathbf{Q}$. Последний, как известно из гидродинамики, складывается из потока конвективного переноса энергии и потока тепла $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{v^2}{2}+w\right)\rho\mathbf{v}+\mathbf{q} \approx \rho w\mathbf{v} - \varkappa\nabla T + \mathbf{g} \tag{90,2}$$

(w—тепловая функция единицы массы жидкости; в последнем выражении опущен член с более высокой степенью флуктуационной скорости $\mathbf{v}$). Но при малых $\mathbf{k}$ флуктуации реальных физических величин ($\mathbf{v}$, T, ρ и т. п.) содержат, по сравнению с флуктуациями случайных потоков, лишнюю степень $\mathbf{k}$, и потому в пределе $\mathbf{k}\to 0$ флуктуации $\mathbf{g}$ совпадают с флуктуациями $\mathbf{Q}$. Это сразу очевидно уже из того, что в уравнении движения гидродинамических флуктуаций (88,6—8) потоки $\mathbf{g}$ и s_{ik} входят только под знаком пространственных производных, а указанные физические величины—также и в виде производных по времени; после перехода к фурье-компонентам, следовательно, вторые оказываются порядка k/ω по отношению к первым.

В отличие от $\mathbf{g}$, полный поток энергии $\mathbf{Q}$ есть величина, имеющая прямой механический смысл, и ей отвечает определенный квантовомеханический оператор $\hat{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r})$, выражающийся через операторы динамических переменных частиц среды. Вспомнив определение корреляционной функции через операторы (гейзенберговские) соответствующей величины, приходим, таким образом, к формуле

$$\operatorname{Re}\varkappa(\omega)=\frac{1}{6\hbar\omega T}\operatorname{th}\frac{\hbar\omega}{2T}\times$$

$$\times\lim_{\mathbf{k}\to 0}\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\hat{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r})\hat{\mathbf{Q}}(0, 0)+\hat{\mathbf{Q}}(0, 0)\hat{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r})\rangle\,dt\,d^3x \quad (90,3)$$

(*M. S. Green*, 1954).

Более целесообразное представление функции $\varkappa(\omega)$ получится, однако, если воспользоваться формулой, выражающей корреляционную функцию через коммутатор соответствующих операторов.

Если $x_a(\mathbf{r})$, $x_b(\mathbf{r})$—две флуктуирующие величины (равные нулю в равновесии и ведущие себя одинаковым образом при обращении времени), то их корреляционная функция, согласно (76,1) и (75,11), может быть представлена в виде

$$(x_a^{(1)}x_b^{(2)})_\omega=\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\operatorname{Re}\int_0^{\infty}e^{i\omega t}\langle\{\hat{x}_a(t, \mathbf{r}_1),\ \hat{x}_b(0, \mathbf{r}_2)\}\rangle\,dt,$$

где скобки $\{.,.\}$ означают коммутатор. Перейдя к фурье-разложению по координатам $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, получим формулу

$$(x_ax_b)_{\omega\mathbf{k}}=\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\cdot\operatorname{Re}\int\int_0^{\infty}e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{x}_a(t, \mathbf{r}),\ \hat{x}_b(0, 0)\}\rangle\,dt\,d^3x. \quad (90,4)$$

Применив эту формулу к корреляционной функции $(\mathbf{Q}^2)_{\omega\mathbf{k}}$ и подставив в (90,1), получим

$$\operatorname{Re}\varkappa(\omega)=\frac{1}{3\omega T}\lim_{\mathbf{k}\to 0}\operatorname{Re}\int\int_0^{\infty}e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r}),\ \hat{\mathbf{Q}}(0, 0)\}\rangle\,dt\,d^3x.$$

Справа и слева в этой формуле под знаком Re стоят функции ω, стремящиеся к нулю при $\omega\to\infty$ и не имеющие особенностей в верхней полуплоскости комплексной переменной ω. Из равенства вещественных частей таких функций на вещественной оси ω следует также и равенство самих функций, и мы приходим к окончательной формуле:

$$\varkappa(\omega)=\frac{1}{3\omega T}\lim_{\mathbf{k}\to 0}\int\int_0^\infty e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{\mathbf{Q}}(t,\ \mathbf{r}),\ \hat{\mathbf{Q}}(0,\ 0)\}\rangle\,dt\,d^3x. \qquad (90,5)$$

Чтобы получить статическое значение коэффициента теплопроводности, надо затем перейти и к пределу $\omega\to 0$.

Аналогичным образом можно преобразовать формулу (88,21) и получить операторное выражение для коэффициентов вязкости.

Если ввести полный поток импульса $\sigma_{ik}=-P\delta_{ik}+\sigma'_{ik}$ (σ_{ik} из (88,9)), то в пределе $\mathbf{k}\to 0$ флуктуации всех членов, кроме s_{ik}, обратятся в нуль, так что в этом пределе можно заменить корреляционную функцию $(s_{ik}s_{lm})_{\omega\mathbf{k}}$ на $(\sigma_{ik}\sigma_{lm})_{\omega\mathbf{k}}$. В результате получим формулу

$$\eta(\omega)\left(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}\right)+\zeta(\omega)\,\delta_{ik}\delta_{lm}=$$

$$=\frac{1}{\omega}\lim_{\mathbf{k}\to 0}\int\int_0^\infty e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{\sigma}_{ik}(t,\ \mathbf{r}),\ \hat{\sigma}_{lm}(0,\ 0)\}\rangle\,dt\,d^3x, \qquad (90,6)$$

где $\hat{\sigma}_{ik}(t,\ \mathbf{r})$—оператор плотности потока импульса (*H. Mori*, 1958). Свернув это равенство по парам индексов i, k и l, m или i, l и k, m, получим отдельные выражения соответственно для 9ζ или $10\eta+3\zeta$.

§ 91. Динамический формфактор ферми-жидкости

К ферми-жидкости неприменимы формулы (87,4—6) для формфактора при $T=0$, поскольку их вывод предполагает существование (при малых ω и $\mathbf{k}$) лишь фононной ветви спектра элементарных возбуждений. Неприменима к ферми-жидкости также и развитая в §§ 88, 89 гидродинамическая теория флуктуаций: она требует выполнения условия $kl\ll 1$ (l—длина свободного пробега квазичастиц), заведомо нарушающегося в ферми-жидкости, поскольку $l\sim T^{-2}$ и стремится при $T\to 0$ к бесконечности. Поэтому для вычисления формфактора ферми-жидкости надо обратиться к кинетическому уравнению.

При этом удобно исходить из формул (86,17—20), устанавливающих связь формфактора с обобщенной восприимчивостью по отношению к воздействию на жидкость некоторого поля $U(t,\ \mathbf{r})$. В компонентах Фурье также и по координатам опре-