ностей в верхней полуплоскости комплексной переменной ω. Из равенства вещественных частей таких функций на вещественной оси ω следует также и равенство самих функций, и мы приходим к окончательной формуле:

$$\varkappa(\omega)=\frac{1}{3\omega T}\lim_{\mathbf{k}\to 0}\int\int_0^\infty e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{\mathbf{Q}}(t,\ \mathbf{r}),\ \hat{\mathbf{Q}}(0,\ 0)\}\rangle\,dt\,d^3x. \qquad (90,5)$$

Чтобы получить статическое значение коэффициента теплопроводности, надо затем перейти и к пределу $\omega\to 0$.

Аналогичным образом можно преобразовать формулу (88,21) и получить операторное выражение для коэффициентов вязкости.

Если ввести полный поток импульса $\sigma_{ik}=-P\delta_{ik}+\sigma'_{ik}$ (σ_{ik} из (88,9)), то в пределе $\mathbf{k}\to 0$ флуктуации всех членов, кроме s_{ik}, обратятся в нуль, так что в этом пределе можно заменить корреляционную функцию $(s_{ik}s_{lm})_{\omega\mathbf{k}}$ на $(\sigma_{ik}\sigma_{lm})_{\omega\mathbf{k}}$. В результате получим формулу

$$\eta(\omega)\left(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}\right)+\zeta(\omega)\,\delta_{ik}\delta_{lm}=$$

$$=\frac{1}{\omega}\lim_{\mathbf{k}\to 0}\int\int_0^\infty e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\langle\{\hat{\sigma}_{ik}(t,\ \mathbf{r}),\ \hat{\sigma}_{lm}(0,\ 0)\}\rangle\,dt\,d^3x, \qquad (90,6)$$

где $\hat{\sigma}_{ik}(t,\ \mathbf{r})$ — оператор плотности потока импульса (*H. Mori*, 1958). Свернув это равенство по парам индексов i, k и l, m или i, l и k, m, получим отдельные выражения соответственно для 9ζ или $10\eta+3\zeta$.

§ 91. Динамический формфактор ферми-жидкости

К ферми-жидкости неприменимы формулы (87,4—6) для формфактора при $T=0$, поскольку их вывод предполагает существование (при малых ω и $\mathbf{k}$) лишь фононной ветви спектра элементарных возбуждений. Неприменима к ферми-жидкости также и развитая в §§ 88, 89 гидродинамическая теория флуктуаций: она требует выполнения условия $kl\ll 1$ (l — длина свободного пробега квазичастиц), заведомо нарушающегося в ферми-жидкости, поскольку $l\sim T^{-2}$ и стремится при $T\to 0$ к бесконечности. Поэтому для вычисления формфактора ферми-жидкости надо обратиться к кинетическому уравнению.

При этом удобно исходить из формул (86,17—20), устанавливающих связь формфактора с обобщенной восприимчивостью по отношению к воздействию на жидкость некоторого поля $U(t,\ \mathbf{r})$. В компонентах Фурье также и по координатам определение (86,18) записывается как

$$\delta\bar{n}(\omega,\ \mathbf{k}) = -\alpha(\omega,\ \mathbf{k})\, U_{\omega\mathbf{k}}. \tag{91,1}$$

Мы ограничимся случаем $T=0$. Тогда динамический формфактор выражается через $\alpha(\omega,\ \mathbf{k})$ согласно

$$\bar{n}\sigma(\omega,\ \mathbf{k}) = \begin{cases} 2\hbar \operatorname{Im}\alpha(\omega,\ \mathbf{k}), & \omega > 0, \\ 0 & , \ \omega < 0. \end{cases} \tag{91,2}$$

Возмущение же плотности $\delta\bar{n}(\omega, \mathbf{k})$ вычисляется с помощью кинетического уравнения, причем в нем можно (при $T \to 0$) пренебречь интегралом столкновений. Эти вычисления отличаются от произведенных в § 4 для нулевого звука лишь тем, что в энергии квазичастицы добавляется член

$$U(t,\ \mathbf{r}) = U_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}.$$

Соответственно в производной $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ (4,3) добавляется член $\partial U/\partial\mathbf{r} = i\mathbf{k}U$, а в левой стороне кинетического уравнения (4,8)— член

$$-i\mathbf{k}U\frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}} = i\mathbf{kv}U\delta(\varepsilon-\varepsilon_F).$$

Решение кинетического уравнения ищем в виде

$$\begin{gathered} \delta n(\mathbf{p}) = \delta n_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p})\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \\ \delta n_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = -\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^* p_F}\chi(\mathbf{n}), \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{p}. \end{gathered} \tag{91,3}$$

Это—фурье-компонента возмущения импульсного распределения квазичастиц. Искомое же изменение плотности полного числа квазичастиц (совпадающей с плотностью числа истинных частиц) дается интегралом

$$\delta\bar{n}(\omega,\ \mathbf{k}) = \int \delta n_{\omega\mathbf{k}}(\mathbf{p})\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = -\frac{1}{2\hbar}\int \chi(\mathbf{n})\frac{do}{4\pi}\cdot U_{\omega\mathbf{k}}.$$

Определение функции $\chi(\mathbf{n})$ в (91,3) отличается от определения $\nu(\mathbf{n})$ в (4,9) нормировкой: она выбрана здесь так, что формула (91,2) принимает вид

$$\bar{n}\sigma(\omega,\ \mathbf{k}) = \operatorname{Im}\int \chi(\mathbf{n})\frac{do}{4\pi}, \qquad \omega > 0. \tag{91,4}$$

Для самой же функции $\chi(\mathbf{n})$ получается уравнение

$$(\omega - v_F\mathbf{kn})\chi(\mathbf{n}) - v_F\mathbf{kn}\int F(\vartheta)\chi(\mathbf{n}')\frac{do'}{4\pi} = -\mathbf{kn}\frac{2p_F^2}{\pi^2\hbar^2}, \tag{91,5}$$

отличающееся от (4,11) своей правой частью.

Уравнение (91,5) не содержит в явном виде мнимых величин. Появление мнимой части в его решении $\chi(\mathbf{n})$ связано поэтому лишь с обходами полюсов в возникающих в процессе решения интегралах. Правило этих обходов определяется требованием, чтобы наложенное на систему поле $U \propto e^{-i\omega t}$ адиабатически включалось, начиная от $t=-\infty$; для этого надо заменить его частоту $\omega \to \omega + i0$.

Конкретный вид решения зависит от вида функции взаимодействия квазичастиц $F(\vartheta)$. Продемонстрируем ход решения и его свойства на простейшем примере функции $F=\text{const}\equiv F_0$. В этом случае решение уравнения (91,5) имеет вид

$$\chi(\mathbf{n}) = C\frac{v_F\mathbf{kn}}{v_F\mathbf{kn}-\omega-i0}, \tag{91,6}$$

где C — постоянная. Последняя определяется обратной подстановкой выражения (91,6) в (91,5), дающей

$$C(1+I) = \frac{2m^* p_F}{\pi^2\hbar^2}, \tag{91,7}$$

где

$$I = \int \frac{\mathbf{kn}' v_F}{\mathbf{kn}' v_F - \omega - i0}\frac{do'}{4\pi}.$$

Подынтегральное выражение зависит только от угла между $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{k}$, и после очевидной подстановки находим

$$I(s) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{x-s-i0} = 1-\frac{s}{2}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right| + \begin{cases} is\pi/2, & s<1, \\ 0\quad, & s>1, \end{cases} \tag{91,8}$$

где $s=\omega/kv_F$ (мнимая часть интеграла отделяется по правилу (8,11)).

Подставив функцию $\chi(\mathbf{n})$ из (91,6—8) в (91,4), получим динамический формфактор

$$\bar{n}\sigma(\omega, k) = \frac{2m^* p_F}{\pi^2\hbar^2}\operatorname{Im}\frac{I(s)}{1+F_0 I(s)} \tag{91,9}$$

(*А. А. Абрикосов, И. М. Халатников*, 1958). В силу (91,8) он отличен от нуля при $s<1$, т. е. при всех $\omega < kv_F$.

Если $F_0>0$, то в ферми-жидкости возможно распространение нулевого звука со скоростью u_0, определяемой уравнением (4,15):

$$1+F_0 I(s_0) = 0, \quad s_0 = u_0/v_F.$$

При значениях s вблизи s_0 выражение (91,9) принимает вид

$$\text{const}\cdot\operatorname{Im}\frac{1}{s-s_0},$$

причем, согласно сказанному выше, $s=\omega/kv_F$ надо понимать, как $s+i0$. Это значит, что в $\sigma(\omega,\ k)$ появляется еще и δ-функционный член вида $\mathrm{const}\cdot\delta(s-s_0)$, или

$$\sigma(\omega,\ k)=\mathrm{const}\cdot k\delta(\omega-ku_0). \qquad (91.10)$$

Этот член представляет собой вклад в формфактор, обязанный нуль-звуковой ветви энергетического спектра ферми-жидкости; он вполне аналогичен фононному вкладу (87,4) в формфактор бозе-жидкости.

Существование такого члена не связано, конечно, с предположением $F=\mathrm{const}$ и является общим свойством ферми-жидкости, в которой возможно распространение нулевого звука; от закона взаимодействия квазичастиц зависит лишь значение постоянного коэффициента в (91,10). Без правой части уравнение (91,5) совпадает с уравнением нулевого звука; поэтому решение неоднородного уравнения имеет полюс при $\omega/k=u_0$.

Из вида уравнения (91,5) ясно, что его решение зависит от параметров ω и k лишь в виде отношения ω/k. Функцией этого отношения будет, следовательно, и динамический формфактор. Статический же формфактор

$$\sigma(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma(\omega,\ k)\frac{d\omega}{2\pi}$$

будет, следовательно, иметь вид

$$\sigma(k)=\mathrm{const}\cdot k. \qquad (91,11)$$

Это значит, что одновременная пространственная корреляционная функция флуктуаций плотности при $T=0$ в ферми-жидкости (как и в бозе-жидкости) следует закону $\nu(r)\propto r^{-4}$.

Отметим, наконец, что динамический формфактор идеального ферми-газа может быть получен из (91,9) переходом к пределу $F_0\to 0$:

$$\sigma(\omega,\ k)=\frac{m^2\omega}{\pi\hbar^2\bar{n}k},\quad 0<\omega<kv_F.$$

При этом статический формфактор

$$\sigma(k)=\int\limits_0^{kv_F}\sigma(\omega,\ k)\frac{d\omega}{2\pi}=\frac{p_F^2k}{(2\pi\hbar)^2\bar{n}}$$

(в согласии с результатом задачи 1 в V § 117).