

функции распределения. Знак минус в (3,12) выражает тот факт, что столкновения являются механизмом установления статистического равновесия, т. е. стремятся уменьшить отклонение функции распределения от равновесной. В этом смысле величина τ играет роль времени релаксации для установления равновесия в каждом элементе объема газа.

§ 4. *H*-теорема

Предоставленный самому себе газ, как и всякая замкнутая макроскопическая система, стремится перейти в равновесное состояние. Соответственно эволюция неравновесной функции распределения согласно кинетическому уравнению должна сопровождаться возрастанием энтропии газа. Покажем, что это действительно так.

Как известно, энтропия идеального газа, находящегося в неравновесном макроскопическом состоянии, описываемом функцией распределения f , равна

$$S = \int f \ln \frac{e}{f} dV d\Gamma \quad (4,1)$$

(см. V, § 40). Дифференцируя это выражение по времени, пишем

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(f \ln \frac{e}{f} \right) dV d\Gamma = - \int \ln f \frac{\partial f}{\partial t} dV d\Gamma. \quad (4,2)$$

Поскольку установление статистического равновесия в газе осуществляется столкновениями молекул, то возрастание энтропии должно быть связано именно со столкновительной частью изменения функции распределения. Изменение же этой функции, связанное со свободным движением молекул, не может изменить энтропии газа. Действительно, эта часть изменения функции распределения дается (для газа во внешнем поле $U(\mathbf{r})$) первыми двумя членами в правой стороне уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathbf{v}\nabla f - \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \text{St } f.$$

Их вклад в производную dS/dt равен

$$- \int \ln f \left[-\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right] dV d\Gamma = \int \left[\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] \left(f \ln \frac{f}{e} \right) dV d\Gamma.$$

Но интеграл по dV от члена с производной $\partial/\partial \mathbf{r}$ преобразуется согласно теореме Гаусса в интеграл по поверхности; при интегрировании по всему объему газа он обращается в нуль, поскольку за пределами занимаемого газом объема $f=0$. Аналогичным образом, член с производной $\partial/\partial \mathbf{p}$ при интегрировании по

d^3p преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности в импульсном пространстве и тоже обращается в нуль.

Таким образом, для изменения энтропии остается

$$\frac{dS}{dt} = - \int \ln f \cdot \text{St} f d\Gamma dV. \quad (4,3)$$

Этот интеграл можно преобразовать с помощью приема, который мы сформулируем (имея в виду также и дальнейшие применения) в общем виде для интеграла

$$\int \varphi(\Gamma) \text{St} f d\Gamma,$$

где $\varphi(\Gamma)$ — любая функция величин Γ . Представив интеграл столкновений в виде (3,6), пишем

$$\int \varphi(\Gamma) \text{St} f d\Gamma = \int \varphi \omega(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma - \int \varphi \omega(\Gamma', \Gamma'_1; \Gamma, \Gamma_1) f f_1 d^4\Gamma,$$

где для краткости обозначено $d^4\Gamma = d\Gamma d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1$. Поскольку интегрирование производится здесь по всем переменным $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma', \Gamma'_1$, то можно, не меняя интеграла, произвести любое переобозначение переменных. Взаимно переобозначив Γ, Γ_1 и Γ', Γ'_1 во втором интеграле, получим

$$\int \varphi(\Gamma) \text{St} f d\Gamma = \int (\varphi - \varphi') \omega(\Gamma, \Gamma_1; \Gamma', \Gamma'_1) f' f'_1 d^4\Gamma.$$

Переобозначив теперь $\Gamma, \Gamma' \leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma'_1$, взяв полусумму получающихся таким образом интегралов и учтя очевидную симметрию функции ω по отношению к двум сталкивающимся частицам, получим формулу преобразования

$$\int \varphi(\Gamma) \text{St} f d\Gamma = \frac{1}{2} \int (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) \omega' f' f'_1 d^4\Gamma. \quad (4,4)$$

В частности, интеграл $\int \text{St} f d\Gamma = 0$; представив здесь $\text{St} f$ в виде (3,7), получим

$$\int \text{St} f d\Gamma = \int \omega' (f' f'_1 - f f_1) d^4\Gamma = 0. \quad (4,5)$$

В применении к интегралу (4,3) формула (4,4) дает

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \int \omega' f' f'_1 \ln \frac{f' f'_1}{f f_1} d^4\Gamma dV = \frac{1}{2} \int \omega' f f_1 x \ln x d^4\Gamma dV,$$

где обозначено $x = f' f'_1 / f f_1$. Вычтя из этого выражения половину равного нулю интеграла (4,5), перепишем его в виде

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \int \omega' f f_1 (x \ln x - x + 1) d^4\Gamma dV. \quad (4,6)$$

Функция в скобках в подынтегральном выражении неотрицательна при всех $x > 0$: она равна нулю при $x = 1$ и возрастает по обе стороны от этой точки. По определению положительны также и множители ω' , f , f_1 под знаком интеграла. Таким образом, мы приходим к требуемому результату

$$\frac{dS}{dt} \geq 0, \quad (4,7)$$

выражающему собой закон возрастания энтропии (знак равенства имеет место в равновесии)¹⁾.

Обратим внимание на то, что в силу неотрицательности подынтегрального выражения в (4,6) (а тем самым и в (4,3)) положителен не только весь интеграл (4,3) по $d\Gamma dV$, но и интеграл только по $d\Gamma$. Другими словами, столкновения приводят к возрастанию энтропии в каждом элементе объема газа. Это, конечно, не значит, что энтропия вообще возрастает в каждом элементе объема, так как она может переноситься из одного участка в другой за счет свободного движения молекул.

§ 5. Переход к макроскопическим уравнениям

Кинетическое уравнение Больцмана дает микроскопическое описание эволюции состояния газа. Покажем, каким образом производится переход от кинетического уравнения к обычным уравнениям гидродинамики, осуществляющим менее детальное, макроскопическое описание этой эволюции. Такое описание применимо в условиях, когда макроскопические свойства газа (его температура, плотность, скорость и т. п.) достаточно медленно меняются вдоль его объема: расстояния L , на которых происходит существенное изменение этих свойств, должны быть велики по сравнению с длиной свободного пробега молекул l .

Мы уже упоминали, что интеграл

$$N(t, \mathbf{r}) = \int f(t, \mathbf{r}, \Gamma) d\Gamma \quad (5,1)$$

есть плотность распределения молекул газа в пространстве; произведение $\rho = mN$ есть соответственно массовая плотность газа. Скорость макроскопического движения газа обозначим через \mathbf{V} (в отличие от микроскопических скоростей молекул \mathbf{v}); она определяется как среднее значение

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \int \mathbf{v} f d\Gamma. \quad (5.2)$$

¹⁾ Доказательство закона возрастания энтропии с помощью кинетического уравнения было дано Больцманом и явилось первым микроскопическим обоснованием этого закона. В применении к газам этот закон часто называют *H-теоремой* (по обозначению — H , использованному Больцманом для энтропии).