

Функция в скобках в подынтегральном выражении неотрицательна при всех $x > 0$: она равна нулю при $x = 1$ и возрастает по обе стороны от этой точки. По определению положительны также и множители ω' , f , f_1 под знаком интеграла. Таким образом, мы приходим к требуемому результату

$$\frac{dS}{dt} \geq 0, \quad (4,7)$$

выражающему собой закон возрастания энтропии (знак равенства имеет место в равновесии)¹⁾.

Обратим внимание на то, что в силу неотрицательности подынтегрального выражения в (4,6) (а тем самым и в (4,3)) положителен не только весь интеграл (4,3) по $d\Gamma dV$, но и интеграл только по $d\Gamma$. Другими словами, столкновения приводят к возрастанию энтропии в каждом элементе объема газа. Это, конечно, не значит, что энтропия вообще возрастает в каждом элементе объема, так как она может переноситься из одного участка в другой за счет свободного движения молекул.

§ 5. Переход к макроскопическим уравнениям

Кинетическое уравнение Больцмана дает микроскопическое описание эволюции состояния газа. Покажем, каким образом производится переход от кинетического уравнения к обычным уравнениям гидродинамики, осуществляющим менее детальное, макроскопическое описание этой эволюции. Такое описание применимо в условиях, когда макроскопические свойства газа (его температура, плотность, скорость и т. п.) достаточно медленно меняются вдоль его объема: расстояния L , на которых происходит существенное изменение этих свойств, должны быть велики по сравнению с длиной свободного пробега молекул l .

Мы уже упоминали, что интеграл

$$N(t, \mathbf{r}) = \int f(t, \mathbf{r}, \Gamma) d\Gamma \quad (5,1)$$

есть плотность распределения молекул газа в пространстве; произведение $\rho = mN$ есть соответственно массовая плотность газа. Скорость макроскопического движения газа обозначим через \mathbf{V} (в отличие от микроскопических скоростей молекул \mathbf{v}); она определяется как среднее значение

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \int \mathbf{v} f d\Gamma. \quad (5.2)$$

¹⁾ Доказательство закона возрастания энтропии с помощью кинетического уравнения было дано Больцманом и явилось первым микроскопическим обоснованием этого закона. В применении к газам этот закон часто называют *H-теоремой* (по обозначению — H , использованному Больцманом для энтропии).

Столкновения не меняют ни числа сталкивающихся частиц, ни их суммарных энергии и импульса. Ясно поэтому, что столкновительная часть изменения функции распределения не может привести к изменению также и макроскопических величин в каждом элементе объема газа—его плотности, внутренней энергии и макроскопической скорости \mathbf{V} . Действительно, столкновительные части изменения полных числа, энергии и импульса молекул в единице объема газа даются равными нулю интегралами

$$\int St f d\Gamma = 0, \quad \int \varepsilon St f d\Gamma = 0, \quad \int \mathbf{p} St f d\Gamma = 0. \quad (5.3)$$

В этих равенствах легко убедиться, применив к интегралам преобразование (4,4) соответственно с $\varphi=1$, ε или \mathbf{p} (первый интеграл обращается в нуль тождественно, а второй и третий— в силу сохранения энергии и импульса при столкновениях).

Напишем теперь кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha f) = St f \quad (5.4)$$

и проинтегрируем его по $d\Gamma$, предварительно умножив на m , ρ_β или ε . Во всех трех случаях правая сторона уравнения обратится в нуль и мы получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho V_\alpha + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N \bar{\varepsilon} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (5.7)$$

Первое из них есть обычное гидродинамическое уравнение непрерывности, выражающее собой сохранение массы газа. Второе уравнение выражает сохранение импульса; тензор $\Pi_{\alpha\beta}$ определен как

$$\Pi_{\alpha\beta} = \int m v_\alpha v_\beta f d\Gamma \quad (5.8)$$

и представляет собой тензор плотности потока импульса: его компонента $\Pi_{\alpha\beta}$ есть α -я компонента импульса, переносимого молекулами в 1 с через единичную площадку, перпендикулярную оси x_β . Наконец, (5,7) есть уравнение сохранения энергии; вектор \mathbf{q} определен как

$$\mathbf{q} = \int \varepsilon \mathbf{v} f d\Gamma \quad (5.9)$$

и представляет собой плотность потока энергии в газе.

Для приведения (5,6) и (5,7) к виду обычных гидродинамических уравнений надо, однако, еще выразить $\Pi_{\alpha\beta}$ и \mathbf{q} чрез

макроскопические величины. Мы уже упоминали, что макроскопическое описание газа предполагает достаточную малость градиентов его макроскопических характеристик. В таком случае в первом приближении можно считать, что в каждом отдельном участке газа успевают установиться тепловое равновесие, между тем как весь газ в целом не находится в равновесии. Другими словами, в каждом элементе объема функция распределения f принимается *локально-равновесной* — совпадающей с равновесной функцией f_0 с теми плотностью, температурой и макроскопической скоростью, которые имеются в данном элементе. Такое приближение означает пренебрежение всеми диссипативными процессами в газе — вязкостью и теплопроводностью. Естественно, что уравнения (5,6—7) сводятся при этом к уравнениям гидродинамики идеальной жидкости. Убедимся в этом.

Равновесное распределение в участке газа, движущемся как целое со скоростью \mathbf{V} , отличается от равновесного распределения в неподвижном газе лишь преобразованием Галилея; перейдя в систему отсчета K' , движущуюся вместе с газом, мы получим обычное распределение Больцмана. Скорости \mathbf{v}' молекул в этой системе связаны с их скоростями в исходной системе K посредством $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. Пишем

$$\Pi_{\alpha\beta} = mN \langle v_\alpha v_\beta \rangle = mN \langle (V_\alpha + v'_\alpha) (V_\beta + v'_\beta) \rangle = mN (V_\alpha V_\beta + \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle);$$

члены $V_\alpha v'_\beta$ и $V_\beta v'_\alpha$ обращаются в нуль при усреднении по направлениям \mathbf{v}' , поскольку все направления скорости молекулы в системе K' равновероятны. По этой же причине

$$\langle v'_\alpha v'_\beta \rangle = \frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle \delta_{\alpha\beta}; \quad (5,10)$$

средний же квадрат тепловой скорости $\langle v'^2 \rangle = 3T/m$, где T — температура газа. Наконец, заметив, что NT есть давление газа P , получим

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta + \delta_{\alpha\beta} P, \quad (5,11)$$

т. е. известное выражение для тензора потока импульса в идеальной жидкости; уравнение (5,6) с этим тензором эквивалентно гидродинамическому уравнению Эйлера (см. VI, § 7).

Для преобразования интеграла (5,9) замечаем, что энергия молекулы ε в системе отсчета K связана с ее энергией ε' в системе K' посредством

$$\varepsilon = \varepsilon' + m\mathbf{V}\mathbf{v}' + \frac{1}{2} mV^2.$$

Подставив это выражение и $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ в $\mathbf{q} = N\bar{\varepsilon}\mathbf{v}$, получим

$$\mathbf{q} = N\mathbf{V} \left[\frac{mV^2}{2} + \frac{m}{3} \overline{v'^2} + \bar{\varepsilon}' \right] = \mathbf{V} \left(\frac{\rho V^2}{2} + P + N\bar{\varepsilon}' \right)$$

(при усреднении произведения $\mathbf{v}'(V\mathbf{v}')$ использовано (5,10)). Но $N\bar{\epsilon}'$ есть термодинамическая внутренняя энергия газа, отнесенная к единице объема; сумма же $N\bar{\epsilon}' + P$ есть тепловая функция W того же количества газа. Таким образом,

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} \left(\frac{\rho V^2}{2} + W \right) \quad (5,12)$$

в согласии с известным выражением потока энергии в гидродинамике идеальной жидкости (см. VI, § 6).

Наконец, остановимся на законе сохранения момента импульса в кинетическом уравнении. Строгий закон сохранения должен иметь место лишь для полного момента газа, складывающегося из орбитального момента молекул в их поступательном движении и их собственных вращательных моментов \mathbf{M} ; плотность полного момента дается суммой двух интегралов

$$\int [\mathbf{r}\mathbf{p}] f d\Gamma + \int \mathbf{M} f d\Gamma. \quad (5,13)$$

Но эти два члена имеют различный порядок величины. Орбитальный момент относительного движения двух молекул, находящихся на среднем расстоянии \bar{r} друг от друга, порядка величины $m\bar{v}\bar{r}$; собственный же момент молекулы $M \sim m\bar{v}d$, т. е. мал по сравнению с орбитальным моментом (поскольку всегда $d \ll \bar{r}$).

Естественно поэтому, что кинетическое уравнение Больцмана, отвечающее первому исчезающему приближению по малой величине d/\bar{r} , не может учесть малых изменений орбитального момента, связанных с обменом между двумя частями полного момента (5,13). С этим связано то обстоятельство, что уравнение Больцмана сохраняет полный орбитальный момент газа: из равенства $\int \mathbf{p} \text{St} f d\Gamma = 0$, выражающего сохранение импульса, автоматически следует, что и

$$\int [\mathbf{r}\mathbf{p}] \text{St} f d\Gamma = \left[\mathbf{r} \int \mathbf{p} \text{St} f d\Gamma \right] = 0. \quad (5,14)$$

Происхождение этого свойства очевидно: поскольку в уравнении Больцмана столкновения рассматриваются как происходящие в одной точке, то вместе с суммой импульсов сталкивающихся молекул сохраняется также и сумма их орбитальных моментов. Чтобы получить уравнение, описывающее изменение орбитального момента, надо было бы учесть члены следующего порядка по d/\bar{r} , связанные с тем, что в момент соударения молекулы находятся на конечном расстоянии друг от друга.

В то же время, однако, самый процесс обмена моментом между поступательными и вращательными степенями свободы

может быть описан в рамках уравнения Больцмана соотношением вида

$$\frac{dM}{dt} = \int M \text{St} f d\Gamma, \quad (5,15)$$

где M — плотность собственного момента вращения молекул. Поскольку при столкновении молекул сумма их собственных моментов не обязана сохраняться, интеграл в правой стороне (5,15), вообще говоря, отличен от нуля и определяет скорость изменения величины M . Если в газе каким-либо искусственным способом создана отличная от нуля плотность момента, то его дальнейшая релаксация будет определяться уравнением (5,15).

§ 6. Кинетическое уравнение для слабо неоднородного газа

Для того чтобы включить в рассмотрение диссипативные процессы (теплопроводность и вязкость) в слабо неоднородном газе, надо обратиться к следующему (после рассмотренного в предыдущем параграфе) приближению. Вместо того чтобы считать функцию распределения в каждом участке газа просто локально-равновесной функцией f_0 , учтем теперь также и небольшое отличие f от f_0 , т. е. напомним f в виде

$$f = f_0 + \delta f, \quad \delta f = -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \chi(\Gamma) = \frac{1}{T} f_0 \chi, \quad (6,1)$$

где δf — малая поправка ($\delta f \ll f_0$). Последнюю целесообразно представлять в написанном здесь виде, вынеся из нее множитель $-\partial f_0 / \partial \varepsilon$; для распределения Больцмана эта производная отличается лишь множителем $1/T$ от самой функции f_0 . Поправка δf должна в принципе определяться путем решения линеаризованного по отношению к ней кинетического уравнения¹⁾.

Помимо самого кинетического уравнения, функция χ должна удовлетворять еще и определенным дополнительным условиям. Дело в том, что f_0 есть равновесная функция распределения, отвечающая заданным (в рассматриваемом элементе объема) плотностям числа частиц, энергии и импульса газа, т. е. заданным значениям интегралов

$$\int f_0 d\Gamma, \quad \int \varepsilon f_0 d\Gamma, \quad \int p f_0 d\Gamma. \quad (6,2')$$

Неравновесная функция распределения (6,1) должна приводить к тем же значениям этих величин, т. е. интегралы с f и f_0 должны быть одинаковыми. Это значит, другими словами, что

¹⁾ Такой метод решения кинетического уравнения принадлежит Энскогу (D. Enskog, 1917).