может быть описан в рамках уравнения Больцмана соотношением вида

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt}=\int \mathbf{M}\,\mathrm{St}\,f\,d\Gamma, \tag{5,15}$$

где $\mathfrak{M}$ — плотность собственного момента вращения молекул. Поскольку при столкновении молекул сумма их собственных моментов не обязана сохраняться, интеграл в правой стороне (5,15), вообще говоря, отличен от нуля и определяет скорость изменения величины $\mathfrak{M}$. Если в газе каким-либо искусственным способом создана отличная от нуля плотность момента, то его дальнейшая релаксация будет определяться уравнением (5,15).

§ 6. Кинетическое уравнение для слабо неоднородного газа

Для того чтобы включить в рассмотрение диссипативные процессы (теплопроводность и вязкость) в слабо неоднородном газе, надо обратиться к следующему (после рассмотренного в предыдущем параграфе) приближению. Вместо того чтобы считать функцию распределения в каждом участке газа просто локально-равновесной функцией f_0, учтем теперь также и небольшое отличие f от f_0, т. е. напишем f в виде

$$f=f_0+\delta f, \qquad \delta f=-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\chi(\Gamma)=\frac{1}{T}f_0\chi, \tag{6,1}$$

где δf — малая поправка ($\delta f \ll f_0$). Последнюю целесообразно представлять в написанном здесь виде, вынеся из нее множитель $-\partial f_0/\partial\varepsilon$; для распределения Больцмана эта производная отличается лишь множителем $1/T$ от самой функции f_0. Поправка δf должна в принципе определяться путем решения линеаризованного по отношению к ней кинетического уравнения[1]).

Помимо самого кинетического уравнения, функция χ должна удовлетворять еще и определенным дополнительным условиям. Дело в том, что f_0 есть равновесная функция распределения, отвечающая заданным (в рассматриваемом элементе объема) плотностям числа частиц, энергии и импульса газа, т. е. заданным значениям интегралов

$$\int f_0\,d\Gamma, \quad \int \varepsilon f_0\,d\Gamma, \quad \int \mathbf{p} f_0\,d\Gamma. \tag{6,2}$$

Неравновесная функция распределения (6,1) должна приводить к тем же значениям этих величин, т. е. интегралы с f и f_0 должны быть одинаковыми. Это значит, другими словами, что

[1]) Такой метод решения кинетического уравнения принадлежит *Энскогу* (*D. Enskog*, 1917).

функция χ должна удовлетворять условиям

$$\int f_0\chi\, d\Gamma = 0, \quad \int f_0\chi\varepsilon\, d\Gamma = 0, \quad \int f_0\chi\mathbf{p}\, d\Gamma = 0. \tag{6,3}$$

Подчеркнем, что само понятие температуры в неравновесном газе становится определенным лишь в результате приписывания интегралам (6,2) определенных значений. Это понятие имеет безусловный характер лишь в полностью равновесном состоянии газа в целом; для определения же температуры в неравновесном газе требуется дополнительное условие, каковым и служит задание указанных значений.

Преобразуем, прежде всего, интеграл столкновений в кинетическом уравнении (3,8). При подстановке в него функций в виде (6,1) члены, не содержащие малой поправки χ, взаимно сокращаются, поскольку равновесная функция распределения обращает интеграл столкновений в нуль. Члены первого порядка дают

$$\operatorname{St} f = \frac{f_0}{T} I(\chi), \tag{6,4}$$

где $I(\chi)$ обозначает линейный интегральный оператор

$$I(\chi) = \int w' f_{01}(\chi' + \chi_1' - \chi - \chi_1)\, d\Gamma_1\, d\Gamma'\, d\Gamma_1'. \tag{6,5}$$

Здесь использовано равенство $f_0 f_{01} = f_0' f_{01}'$; множитель f_0 может быть вынесен из-под знака интеграла, поскольку по $d\Gamma$ не производится интегрирования.

Обратим внимание на то, что интеграл (6,5) тождественно обращается в нуль для функций

$$\chi = \text{const}, \quad \chi = \text{const}\cdot\varepsilon, \quad \chi = \mathbf{p}\,\delta\mathbf{V} \tag{6,6}$$

(где $\delta\mathbf{V}$ — постоянный вектор); обращение в нуль для второй и третьей из этих функций связано с сохранением энергии и импульса в каждом столкновении. Будучи независимыми от времени и координат, функции (6,6) удовлетворяют, следовательно, и всему кинетическому уравнению.

Эти решения имеют простое происхождение. Кинетическому уравнению тождественно удовлетворяет равновесная функция распределения с любыми (постоянными) плотностью частиц и температурой. Поэтому ему автоматически удовлетворяет и малая поправка

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial N}\delta N = f_0 \frac{\delta N}{N},$$

возникающая при изменении плотности на δN; отсюда возникает первое из решений (6,6). Аналогичным образом удовлетворяет уравнению и добавка

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial T}\delta T,$$

возникающая в результате изменения T на малую постоянную величину δT. Производная же $\partial f_0/\partial T$ складывается из члена вида $\mathrm{const}\cdot f_0$ (происходящего от дифференцирования нормировочного множителя в f_0) и из члена, пропорционального εf_0; отсюда и возникает второе из решений (6,6). Третье же из этих решений возникает как выражение галилеевского принципа относительности: равновесная функция распределения должна удовлетворять кинетическому уравнению также и после перехода к любой другой инерциальной системе отсчета. При переходе к системе, движущейся относительно первоначальной с малой постоянной скоростью $\delta\mathbf{V}$, скорости молекул $\mathbf{v}$ заменяются на $\mathbf{v}+\delta\mathbf{V}$, так что функция распределения получает приращение

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}\delta\mathbf{V} = -\frac{f_0}{T}\mathbf{p}\delta\mathbf{V},$$

чему и отвечает третье из решений (6,6). «Паразитные» решения (6,6) исключаются наложением трех условий (6,3).

Преобразование левой стороны кинетического уравнения произведем сразу в общем виде, охватывающем как задачу о теплопроводности, так и задачу о вязкости. Другими словами, допускаем существование градиентов всех макроскопических характеристик газа, в том числе его макроскопической скорости $\mathbf{V}$.

Равновесная функция распределения в неподвижном ($\mathbf{V}=0$) газе есть распределение Больцмана, которое напишем в виде

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu-\varepsilon(\Gamma)}{T}\right), \qquad (6,7)$$

где μ — химический потенциал газа. Распределение же в движущемся газе отличается от (6,7) (как уже было отмечено в § 5) лишь галилеевским преобразованием скорости. Для того чтобы написать эту функцию в явном виде, выделим из полной энергии молекулы $\varepsilon(\Gamma)$ кинетическую энергию ее поступательного движения:

$$\varepsilon(\Gamma) = \frac{mv^2}{2} + \varepsilon_{\text{вн}}; \qquad (6,8)$$

внутренняя энергия $\varepsilon_{\text{вн}}$ включает в себя энергию вращения молекулы и колебательную энергию. Заменив $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}-\mathbf{V}$, получим распределение Больцмана в движущемся газе:

$$f_0 = \exp\left(\frac{\mu-\varepsilon_{\text{вн}}}{T}\right)\exp\left(-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2}{2T}\right). \qquad (6,9)$$

В слабо неоднородном газе f_0 зависит от координат и времени, причем эта зависимость возникает через посредство меняющихся вдоль газа (и со временем) его макроскопических характеристик—скорости $\mathbf{V}$, температуры T и давления P (а с ними и μ). Поскольку градиенты этих величин предполагаются малыми, в левой стороне кинетического уравнения достаточно (в рассматриваемом приближении) подставить f_0 вместо f.

Вычисления можно несколько упростить, учтя очевидную независимость интересующих нас в конечном счете кинетических коэффициентов от скорости $\mathbf{V}$. Поэтому достаточно рассмотреть какую-либо одну точку в газе и выбрать в качестве таковой ту, в которой скорость $\mathbf{V}$ (но, конечно, не ее производные) равна нулю.

Продифференцировав выражение (6,9) по времени и положив затем $\mathbf{V}=0$, получим

$$\frac{T}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial t}=\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P-\frac{\mu-\varepsilon(\Gamma)}{T}\right]\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T\frac{\partial P}{\partial t}+m\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}.$$

Согласно известным термодинамическим формулам имеем

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P=-s,\qquad \left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T=\frac{1}{N},\qquad \mu=w-Ts,$$

где w, s и $1/N$—тепловая функция, энтропия и объем, отнесенные к одной частице газа. Поэтому

$$\frac{T}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial t}=\frac{\varepsilon(\Gamma)-w}{T}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{N}\frac{\partial P}{\partial t}+m\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}. \tag{6,10}$$

Аналогичным образом найдем

$$\frac{T}{f_0}\mathbf{v}\nabla f_0=\frac{\varepsilon(\Gamma)-w}{T}\mathbf{v}\nabla T+\frac{1}{N}\mathbf{v}\nabla P+mv_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}, \tag{6,11}$$

где для краткости введено обозначение

$$V_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right),\quad V_{\alpha\alpha}=\operatorname{div}\mathbf{V}; \tag{6,12}$$

в последнем члене в (6,11) произведена тождественная замена

$$v_\alpha v_\beta\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}=v_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}.$$

Левая сторона кинетического уравнения получается сложением выражений (6,10—11). При этом все производные по времени от макроскопических величин могут быть выражены через их пространственные градиенты согласно гидродинамическим уравнениям идеальной (т. е. невязкой и нетеплопроводящей) среды; учет диссипативных членов здесь привел бы к величинам высшего порядка малости. В точке, в которой $\mathbf{V}=0$, уравнение Эйлера дает

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla P=-\frac{1}{Nm}\nabla P. \tag{6,13}$$

В той же точке из уравнения непрерывности имеем $\partial N/\partial t = -N\operatorname{div}\mathbf{V}$, или

$$\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t}=-\operatorname{div}\mathbf{V} \tag{6,14}$$

(использовано уравнение состояния идеального газа $N=P/T$). Наконец, уравнение сохранения энтропии, $\partial s/\partial t+\mathbf{V}\nabla s=0$, дает $\partial s/\partial t=0$, или

$$\frac{c_p}{T}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t}=0, \tag{6,15}$$

где использованы термодинамические формулы

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P=\frac{c_p}{T},\quad \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T=-\frac{1}{P}$$

(c_p—теплоемкость, тоже отнесенная к одной молекуле); вторая из этих формул относится к идеальному газу. Из равенств (6,14—15) находим

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{1}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V},\quad \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{c_p}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V} \tag{6,16}$$

(учтено, что для идеального газа $c_p-c_v=1$).

Простое вычисление приводит теперь к результату

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla f_0=$$
$$=\frac{f_0}{T}\left\{\frac{\varepsilon(\Gamma)-w}{T}\mathbf{v}\nabla T+mv_\alpha v_\beta V_{\alpha\beta}+\frac{w-Tc_p-\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\operatorname{div}\mathbf{V}\right\}. \tag{6,17}$$

Подчеркнем, что до сих пор не делалось никаких специфических предположений о характере температурной зависимости термодинамических величин; использовалось лишь общее уравнение состояния идеального газа. Для газа же с классическим вращением молекул и невозбужденными колебаниями теплоемкость не зависит от температуры и тепловая функция[1])

$$w=c_pT. \tag{6,18}$$

[1]) Предполагается, что энергия молекулы $\varepsilon(\Gamma)$ отсчитывается от ее наименьшего значения; соответственно этому опускается и независящая от температуры аддитивная постоянная в w.

Тогда последний член в (6,17) упрощается; приравняв (6,17) и (6,4), напишем окончательно кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\varepsilon(\Gamma)-c_pT}{T}\mathbf{v}\nabla T+\left[mv_\alpha v_\beta-\delta_{\alpha\beta}\frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\right]V_{\alpha\beta}=I(\chi). \tag{6,19}$$

В следующих двух параграфах это уравнение будет рассмотрено более подробно в применении к задачам о теплопроводности и вязкости.

Напомним, что уже из закона возрастания энтропии следует, что градиент давления (в отсутствие градиентов температуры и скорости) не приводит к возникновению диссипативных процессов (ср. VI, § 49). В кинетическом уравнении это требование удовлетворяется автоматически и проявляется в выпадении градиента давления из левой стороны (6,19).

§ 7. Теплопроводность газа

Для вычисления коэффициента теплопроводности газа надо решать кинетическое уравнение с градиентом температуры. Сохранив в (6,19) лишь первый член в левой стороне, имеем

$$\frac{\varepsilon(\Gamma)-c_pT}{T}\mathbf{v}\nabla T=I(\chi). \tag{7,1}$$

Решение этого уравнения надо искать в виде

$$\chi=\mathbf{g}\nabla T, \tag{7,2}$$

где вектор $\mathbf{g}$ — функция только от величин Г. Действительно, при подстановке в (7,1) в обеих сторонах равенства получаем множитель ∇T. Поскольку уравнение должно иметь место при произвольных значениях вектора ∇T, должны быть равными коэффициенты при ∇T в обеих сторонах равенства, так что мы получаем для $\mathbf{g}$ уравнение

$$\mathbf{v}\frac{\varepsilon(\Gamma)-c_pT}{T}=I(\mathbf{g}), \tag{7,3}$$

уже не содержащее ∇T (а тем самым и явной зависимости от координат).

Функция χ должна еще удовлетворять условиям (6,3). С функцией χ в виде (7,2) первые два из этих условий удовлетворяются автоматически: это очевидно уже из того, что уравнение (7,3) не содержит никаких векторных параметров, вдоль которых могли бы быть направлены постоянные векторы — интегралы $\int f_0\mathbf{g}\,d\Gamma$ и $\int f_0\varepsilon\mathbf{g}\,d\Gamma$. Третье же накладывает на решение урав-