Тогда последний член в (6,17) упрощается; приравняв (6,17) и (6,4), напишем окончательно кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\varepsilon(\Gamma)-c_pT}{T}\mathbf{v}\nabla T+\left[mv_\alpha v_\beta-\delta_{\alpha\beta}\frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\right]V_{\alpha\beta}=I(\chi). \qquad (6,19)$$

В следующих двух параграфах это уравнение будет рассмотрено более подробно в применении к задачам о теплопроводности и вязкости.

Напомним, что уже из закона возрастания энтропии следует, что градиент давления (в отсутствие градиентов температуры и скорости) не приводит к возникновению диссипативных процессов (ср. VI, § 49). В кинетическом уравнении это требование удовлетворяется автоматически и проявляется в выпадении градиента давления из левой стороны (6,19).

§ 7. Теплопроводность газа

Для вычисления коэффициента теплопроводности газа надо решать кинетическое уравнение с градиентом температуры. Сохранив в (6,19) лишь первый член в левой стороне, имеем

$$\frac{\varepsilon(\Gamma)-c_pT}{T}\mathbf{v}\nabla T=I(\chi). \qquad (7,1)$$

Решение этого уравнения надо искать в виде

$$\chi=\mathbf{g}\nabla T, \qquad (7,2)$$

где вектор $\mathbf{g}$—функция только от величин Г. Действительно, при подстановке в (7,1) в обеих сторонах равенства получаем множитель ∇T. Поскольку уравнение должно иметь место при произвольных значениях вектора ∇T, должны быть равными коэффициенты при ∇T в обеих сторонах равенства, так что мы получаем для $\mathbf{g}$ уравнение

$$\mathbf{v}\frac{\varepsilon(\Gamma)-c_pT}{T}=I(\mathbf{g}), \qquad (7,3)$$

уже не содержащее ∇T (а тем самым и явной зависимости от координат).

Функция χ должна еще удовлетворять условиям (6,3). С функцией χ в виде (7,2) первые два из этих условий удовлетворяются автоматически: это очевидно уже из того, что уравнение (7,3) не содержит никаких векторных параметров, вдоль которых могли бы быть направлены постоянные векторы — интегралы $\int f_0\mathbf{g}\,d\Gamma$ и $\int f_0\varepsilon\mathbf{g}\,d\Gamma$. Третье же накладывает на решение уравнения (7,3) дополнительное условие

$$\int f_0 \mathbf{v} \mathbf{g}\, d\Gamma = 0. \tag{7,4}$$

Если кинетическое уравнение решено и функция χ известна, то можно определить коэффициент теплопроводности, вычисляя поток энергии, точнее—его диссипативную часть, не связанную просто с конвективным переносом энергии (эту часть потока энергии будем обозначать посредством $\mathbf{q}'$). Но в отсутствие макроскопического движения в газе $\mathbf{q}'$ совпадает с полным потоком энергии $\mathbf{q}$, даваемым интегралом (5,9). При $f = f_0$ этот интеграл исчезает тождественно за счет интегрирования по направлениям $\mathbf{v}$. Поэтому при подстановке f (6,1) остается

$$\mathbf{q} = \frac{1}{T} \int \mathbf{v} f_0 \chi \varepsilon\, d\Gamma = \frac{1}{T} \int f_0 \varepsilon \mathbf{v} (\mathbf{g} \nabla T)\, d\Gamma,$$

или, в компонентах,

$$q_\alpha = -\varkappa_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial x_\beta}, \qquad \varkappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} \int f_0 \varepsilon v_\alpha g_\beta\, d\Gamma. \tag{7,5}$$

Ввиду изотропии равновесного газа какие-либо избранные направления в нем отсутствуют и тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$ может выражаться лишь через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$, т. е. сводится к скаляру:

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \varkappa \delta_{\alpha\beta}, \qquad \varkappa = \varkappa_{\alpha\alpha}/3.$$

Таким образом, поток энергии

$$\mathbf{q} = -\varkappa \nabla T, \tag{7,6}$$

где скалярный *коэффициент теплопроводности*

$$\varkappa = -\frac{1}{3T} \int f_0 \varepsilon \mathbf{v} \mathbf{g}\, d\Gamma. \tag{7,7}$$

Положительность этой величины (поток $\mathbf{q}$ должен быть направлен противоположно градиенту температуры) автоматически обеспечивается кинетическим уравнением (см. § 9).

В одноатомных газах скорость $\mathbf{v}$—единственный вектор, от которого зависит функция $\mathbf{g}$; ясно поэтому, что эта функция должна иметь вид

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{v}}{v} g(v). \tag{7,8}$$

В многоатомных газах функция $\mathbf{g}$ зависит уже от двух векторов—скорости $\mathbf{v}$ и момента $\mathbf{M}$. Если симметрия молекул не допускает существования стереоизомерии, то интеграл столкновений, а с ним и уравнение (7,3) инвариантны по отношению к инверсии; такой же инвариантностью должно обладать и его решение χ. Другими словами, $\chi = \mathbf{g}\nabla T$ должно быть истинным скаляром, а поскольку градиент ∇T есть истинный вектор, то таким же вектором должна быть и функция $\mathbf{g}$. Так, для двухатомного газа, где векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{M}$ исчерпываются величины Γ, функция $\mathbf{g}(\Gamma)$ имеет вид

$$\mathbf{g} = \mathbf{v}g_1 + \mathbf{M}(\mathbf{vM})g_2 + [\mathbf{vM}]g_3, \tag{7,9}$$

где g_1, g_2, g_3—скалярные функции от скалярных аргументов $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{M}^2$, $(\mathbf{vM})^2$; это наиболее общий вид истинного вектора, который может быть построен из истинного же вектора $\mathbf{v}$ и псевдовектора $\mathbf{M}$[1]).

Если же вещество представляет собой стереоизомер, то инвариантность по отношению к инверсии отсутствует: как уже отмечалось в § 2, в таком случае инверсия «превращает» газ в, по существу, другое вещество. Соответственно функция χ сможет содержать также и псевдоскалярные члены, т. е. функция $\mathbf{g}$ — псевдовекторные члены (например, член вида $g_4\mathbf{M}$).

Условие применимости изложенного метода решения кинетического уравнения (основанного на предположении о близости f к f_0) можно выяснить путем оценки интеграла столкновений согласно (3,12). Средняя энергия молекулы $\bar{\varepsilon} \sim T$, поэтому оценка обеих сторон уравнения (7,3) дает $\bar{v} \sim g/\tau \sim g\bar{v}/l$, откуда $g \sim l$. Условие $\chi/T \sim g|\nabla T|/T \ll 1$ (эквивалентное требованию $\delta f \ll f_0$) означает, следовательно, что расстояния L, на которых температура испытывает существенное изменение ($|\nabla T| \sim T/L$), должны быть велики по сравнению с l. Другими словами, функция вида (6,1) представляет собой первые члены разложения решения кинетического уравнения по степеням малого отношения l/L.

Оценка интеграла (7,7) с $g \sim l$ приводит к формуле

$$\varkappa \sim cNl\bar{v}, \tag{7,10}$$

где c—отнесенная к одной молекуле теплоемкость газа. Это — известная элементарная газокинетическая формула (ср. примечание на стр. 58). Положив в ней $l \sim 1/N\sigma$, $c \sim 1$ и $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$, имеем

$$\varkappa \sim \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{m}}. \tag{7,11}$$

В этой оценке сечение σ относится к средней тепловой скорости молекул, и в этом смысле его надо понимать как функцию температуры. С увеличением скорости сечение, вообще

[1]) Решения уравнения Больцмана для газа с вращающимися молекулами впервые рассматривались *Ю. М. Каганом* и *А. М. Афанасьевым* (1961).

говоря, убывает; соответственно σ будет убывающей функцией температуры. При не слишком низких температурах молекулы газа ведут себя, качественно, как твердые упругие частицы, взаимодействующие друг с другом лишь при непосредственных столкновениях. Такому характеру взаимодействия отвечает слабо зависящее от скорости (а потому и от температуры) сечение столкновений. В этих условиях зависимость $\varkappa$ от температуры близка к пропорциональности $\sqrt{T}$.

При заданной температуре коэффициент теплопроводности, как это видно из (7,11), не зависит от плотности газа или, что то же, от его давления. Подчеркнем, что это важное свойство не связано со сделанными при оценке предположениями и является точным в рамках кинетического уравнения Больцмана. Оно возникает как следствие того, что в этом уравнении учитываются только парные столкновения молекул (именно поэтому длина пробега оказывается обратно пропорциональной плотности газа).

§ 8. Вязкость газа

Вычисление вязкости газа с помощью кинетического уравнения производится аналогично вычислению теплопроводности. Разница состоит в том, что отклонение от равновесия обусловлено не градиентом температуры, а неоднородностью потока газа по скорости макроскопического движения $\mathbf{V}$. При этом снова предполагается, что характерные размеры задачи $L \gg l$.

Существуют, как известно, два вида вязкости, коэффициенты которых принято обозначать посредством η и ζ. Они определяются как коэффициенты в тензоре вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$, входящем как часть в тензор плотности потока импульса:

$$\Pi_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} + \rho V_\alpha V_\beta - \sigma'_{\alpha\beta}, \tag{8,1}$$

$$\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta\left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \zeta\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}, \tag{8,2}$$

где $V_{\alpha\beta}$ определено согласно (6,12) (см. VI, § 15). В несжимаемой жидкости проявляется лишь вязкость η. «Вторая» же вязкость ζ проявляется при движениях, в которых $\operatorname{div}\mathbf{V} \neq 0$. Оба коэффициента целесообразно вычислять раздельно.

Опустив в общем кинетическом уравнении (6,19) член с градиентом температуры, перепишем его в виде

$$mv_\alpha v_\beta\left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \left(\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\right)\operatorname{div}\mathbf{V} = I(\chi), \tag{8,3}$$

где в левой стороне разделены члены, создающие первую и вторую вязкости. При вычислении первой вязкости надо считать, что $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$. Получающееся уравнение тождественно перепишем