говоря, убывает; соответственно σ будет убывающей функцией температуры. При не слишком низких температурах молекулы газа ведут себя, качественно, как твердые упругие частицы, взаимодействующие друг с другом лишь при непосредственных столкновениях. Такому характеру взаимодействия отвечает слабо зависящее от скорости (а потому и от температуры) сечение столкновений. В этих условиях зависимость $\varkappa$ от температуры близка к пропорциональности $\sqrt{T}$.

При заданной температуре коэффициент теплопроводности, как это видно из (7,11), не зависит от плотности газа или, что то же, от его давления. Подчеркнем, что это важное свойство не связано со сделанными при оценке предположениями и является точным в рамках кинетического уравнения Больцмана. Оно возникает как следствие того, что в этом уравнении учитываются только парные столкновения молекул (именно поэтому длина пробега оказывается обратно пропорциональной плотности газа).

§ 8. Вязкость газа

Вычисление вязкости газа с помощью кинетического уравнения производится аналогично вычислению теплопроводности. Разница состоит в том, что отклонение от равновесия обусловлено не градиентом температуры, а неоднородностью потока газа по скорости макроскопического движения $\mathbf{V}$. При этом снова предполагается, что характерные размеры задачи $L \gg l$.

Существуют, как известно, два вида вязкости, коэффициенты которых принято обозначать посредством η и ζ. Они определяются как коэффициенты в тензоре вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$, входящем как часть в тензор плотности потока импульса:

$$\Pi_{\alpha\beta} = P\delta_{\alpha\beta} + \rho V_\alpha V_\beta - \sigma'_{\alpha\beta}, \tag{8,1}$$

$$\sigma'_{\alpha\beta} = 2\eta\left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \zeta\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}, \tag{8,2}$$

где $V_{\alpha\beta}$ определено согласно (6,12) (см. VI, § 15). В несжимаемой жидкости проявляется лишь вязкость η. «Вторая» же вязкость ζ проявляется при движениях, в которых $\operatorname{div}\mathbf{V} \neq 0$. Оба коэффициента целесообразно вычислять раздельно.

Опустив в общем кинетическом уравнении (6,19) член с градиентом температуры, перепишем его в виде

$$mv_\alpha v_\beta\left(V_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) + \left(\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\right)\operatorname{div}\mathbf{V} = I(\chi), \tag{8,3}$$

где в левой стороне разделены члены, создающие первую и вторую вязкости. При вычислении первой вязкости надо считать, что $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$. Получающееся уравнение тождественно перепишем в виде

$$m\left(v_\alpha v_\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}v^2\right)V_{\alpha\beta}=I(\chi), \tag{8,4}$$

где оба тензорных множителя в левой стороне имеют равный нулю след.

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\chi=g_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}, \tag{8,5}$$

где $g_{\alpha\beta}(\Gamma)$ — симметричный тензор; поскольку след $V_{\alpha\alpha}=0$, то прибавлением к $g_{\alpha\beta}$ члена $\mathrm{const}\cdot\delta_{\alpha\beta}$ можно всегда добиться того, чтобы было и $g_{\alpha\alpha}=0$, не меняя при этом функции χ. Для $g_{\alpha\beta}$ имеем уравнение

$$m\left(v_\alpha v_\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}v^2\right)=I(g_{\alpha\beta}). \tag{8,6}$$

Дополнительные условия (6,3) удовлетворяются автоматически.

Поток импульса вычисляется по функции распределения как интеграл (5,8). Интересующая нас часть этого тензора — тензор вязких напряжений — дается интегралом

$$\sigma'_{\alpha\beta}=-\frac{m}{T}\int v_\alpha v_\beta f_0\chi\, d\Gamma=\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}V_{\gamma\delta}, \tag{8,7}$$

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\frac{m}{T}\int f_0 v_\alpha v_\beta g_{\gamma\delta}\, d\Gamma. \tag{8,8}$$

Величины $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ составляют тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов α, β и γ, δ и дающий нуль при упрощении по паре γ, δ. Ввиду изотропии газа этот тензор может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$. Выражение, удовлетворяющее этим условиям:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}=\eta\left[\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right].$$

Тогда $\sigma'_{\alpha\beta}=2\eta V_{\alpha\beta}$, так что η есть искомый скалярный коэффициент вязкости. Он определяется путем упрощения тензора по парам индексов α, γ и β, δ:

$$\eta=-\frac{m}{10T}\int v_\alpha v_\beta g_{\alpha\beta} f_0\, d\Gamma. \tag{8,9}$$

В одноатомном газе $g_{\alpha\beta}$ является функцией только от вектора $\mathbf{v}$. Общий вид такого симметричного тензора с равным нулю следом есть

$$g_{\alpha\beta}=\left(v_\alpha v_\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}v^2\right)g(v) \tag{8,10}$$

с одной только скалярной функцией $g(v)$. В многоатомных газах тензор $g_{\alpha\beta}$ составляется с помощью большего числа переменных, в том числе двух векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{M}$. В отсутствие стереоизометрии $g_{\alpha\beta}$ может содержать только истинно-тензорные члены; в газе стереоизомерного вещества допускаются также и псевдотензорные члены.

Оценка коэффициента вязкости, аналогичная оценке (7,10) для коэффициента теплопроводности, приводит к известной элементарной газокинетической формуле

$$\eta \sim m\bar{v}Nl \tag{8,11}$$

(см. примечание на стр. 58). При этом температуропроводность и кинематическая вязкость оказываются одинакового порядка величины:

$$\varkappa/Nc_p \sim \eta/Nm \sim \bar{v}l. \tag{8,12}$$

Положив в (8,11) $l \sim 1/N\sigma$ и $\bar{v} \sim (T/m)^{1/2}$, получим

$$\eta \sim \sqrt{mT}/\sigma. \tag{8,13}$$

Все сказанное в § 7 о зависимости $\varkappa$ от давления и от температуры относится и к коэффициенту вязкости η.

Для вычисления второго коэффициента вязкости надо считать отличным от нуля второй член в левой стороне кинетического уравнения (8,3):

$$\left(\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\right) \operatorname{div} \mathbf{V} = I(\chi). \tag{8,14}$$

Ищем решение в виде

$$\chi = g \operatorname{div} \mathbf{V} \tag{8,15}$$

и для функции g находим уравнение

$$\frac{mv^2}{3} - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v} = I(g). \tag{8,16}$$

Вычислив тензор напряжений и сравнив его с выражением $\zeta\delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}$, получим коэффициент вязкости в виде

$$\zeta = -\frac{m}{3T} \int v^2 g f_0 \, d\Gamma. \tag{8,17}$$

У одноатомных газов $\varepsilon(\Gamma) = mv^2/2$, $c_v = 3/2$, и левая сторона уравнения (8,16) обращается в нуль. Из уравнения $I(g) = 0$ следует тогда, что и $g=0$, а потому и $\zeta=0$. Мы приходим, таким образом, к интересному результату: у одноатомных газов вторая вязкость равна нулю[1]).

Задача

Показать, что вторая вязкость газа ультрарелятивистских частиц равна нулю (*И. М. Халатников*, 1955).

Решение. Энергия ε релятивистской частицы в системе отсчета K, в которой газ движется с (нерелятивистской) скоростью $\mathbf{V}$, связана с ее энергией ε' в системе K', в которой газ покоится, формулой $\varepsilon'=\varepsilon-\mathbf{pV}$, где $\mathbf{p}$ — импульс частицы в системе K (это — формула преобразования Лоренца, в которой опущены члены более чем первого порядка по $\mathbf{V}$). Функция распределения в системе K: $f_0(\varepsilon-\mathbf{pV})$, где $f_0(\varepsilon')$ — распределение Больцмана.

Интересуясь лишь вязкостью, мы можем с самого начала считать равными нулю градиенты всех макроскопических величин, за исключением лишь скорости $\mathbf{V}$; тогда и $\partial\mathbf{V}/\partial t=0$, так что последний член в (6,10) выпадает[2]). В (6,11) первые два члена тоже отсутствуют, а третий заменяется на

$$\mathbf{v}\nabla(\mathbf{pV})=v_\alpha p_\beta\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}=v_\alpha p_\beta V_{\alpha\beta}$$

(направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ совпадают, поэтому $p_\alpha v_\beta=p_\beta v_\alpha$). Уравнения непрерывности и сохранения энтропии в использованном в § 6 виде остаются справедливыми и при движении (с малыми скоростями $\mathbf{V}$) релятивистского газа. Поэтому остаются в силе и формулы (6,16). В результате кинетическое уравнение принимает вид

$$\left(v_\alpha p_\beta-\delta_{\alpha\beta}\frac{\varepsilon}{c_v}\right)V_{\alpha\beta}=I(\chi).$$

В задаче о второй вязкости надо положить $V_{\alpha\beta}={}^1/_3\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}$, и тогда

$$\left(\frac{vp}{3}-\frac{\varepsilon}{c_v}\right)\operatorname{div}\mathbf{V}=I(\chi).$$

В ультрарелятивистском газе $v\approx c$, $\varepsilon=cp$, а теплоемкость $c_v=3$ (см. V, § 44, задача), так что левая сторона уравнения, а с нею и χ обращаются в нуль.

§ 9. Симметрия кинетических коэффициентов

Коэффициенты теплопроводности и вязкости относятся к категории величин, определяющих процессы релаксации слабо неравновесных систем. Эти величины — *кинетические коэффициенты* — удовле-

---

[1]) Подчеркнем, что речь идет о газах именно в том приближении по «параметру газовости» Nd^3, которому отвечает уравнение Больцмана (и в котором вязкость η оказывается независящей от плотности). В следующих приближениях (следующие члены «вириального разложения» — см. § 18) появляется и отличная от нуля вязкость ζ. Существенна также и квадратичная зависимость энергии частицы от ее импульса; в релятивистском «одноатомном» газе вторая вязкость уже не равна нулю (она обращается, однако, снова в нуль в другом предельном случае — ультрарелятивистском; см. задачу).

[2]) Во избежание недоразумений напомним, что в релятивистском газе градиент давления дает свой вклад в теплопроводящий поток энергии (см. VI, § 126).