

дует тогда, что и  $g=0$ , а потому и  $\zeta=0$ . Мы приходим, таким образом, к интересному результату: у одноатомных газов вторая вязкость равна нулю<sup>1)</sup>.

### Задача

Показать, что вторая вязкость газа ультрарелятивистских частиц равна нулю (И. М. Халатников, 1955).

Решение. Энергия  $\varepsilon$  релятивистской частицы в системе отсчета  $K$ , в которой газ движется с (нерелятивистской) скоростью  $\mathbf{V}$ , связана с ее энергией  $\varepsilon'$  в системе  $K'$ , в которой газ покоится, формулой  $\varepsilon' = \varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{V}$ , где  $\mathbf{p}$  — импульс частицы в системе  $K$  (это — формула преобразования Лоренца, в которой опущены члены более чем первого порядка по  $\mathbf{V}$ ). Функция распределения в системе  $K$ :  $f_0(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{V})$ , где  $f_0(\varepsilon')$  — распределение Больцмана.

Интересуясь лишь вязкостью, мы можем с самого начала считать равными нулю градиенты всех макроскопических величин, за исключением лишь скорости  $\mathbf{V}$ ; тогда и  $\partial V/\partial t = 0$ , так что последний член в (6,10) выпадает<sup>2)</sup>. В (6,11) первые два члена тоже отсутствуют, а третий заменяется на

$$\mathbf{v}\nabla(\mathbf{p}\mathbf{V}) = v_\alpha p_\beta \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} = v_\alpha p_\beta V_{\alpha\beta}$$

(направления  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p}$  совпадают, поэтому  $p_\alpha v_\beta = p_\beta v_\alpha$ ). Уравнения непрерывности и сохранения энтропии в использованном в § 6 виде остаются справедливыми и при движении (с малыми скоростями  $\mathbf{V}$ ) релятивистского газа. Поэтому остаются в силе и формулы (6,16). В результате кинетическое уравнение принимает вид

$$\left( v_\alpha p_\beta - \delta_{\alpha\beta} \frac{\varepsilon}{c_v} \right) V_{\alpha\beta} = I(\chi).$$

В задаче о второй вязкости надо положить  $V_{\alpha\beta} = 1/3 \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}$ , и тогда

$$\left( \frac{v p}{3} - \frac{\varepsilon}{c_v} \right) \operatorname{div} \mathbf{V} = I(\chi).$$

В ультрарелятивистском газе  $v \approx c$ ,  $\varepsilon = cp$ , а теплоемкость  $c_v = 3$  (см. V, § 44, задача), так что левая сторона уравнения, а с нею и  $\chi$  обращаются в нуль.

## § 9. Симметрия кинетических коэффициентов

Коэффициенты теплопроводности и вязкости относятся к категории величин, определяющих процессы релаксации слабо неравновесных систем. Эти величины — *кинетические коэффициенты* — удовле-

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что речь идет о газах именно в том приближении по «параметру газности»  $Nd^3$ , которому отвечает уравнение Больцмана (и в котором вязкость  $\eta$  оказывается независимой от плотности). В следующих приближениях (следующие члены «вириального разложения» — см. § 18) появляется и отличная от нуля вязкость  $\zeta$ . Существенна также и квадратичная зависимость энергии частицы от ее импульса; в релятивистском «одноатомном» газе вторая вязкость уже не равна нулю (она обращается, однако, снова в нуль в другом предельном случае — ультрарелятивистском; см. задачу).

<sup>2)</sup> Во избежание недоразумений напомним, что в релятивистском газе градиент давления дает свой вклад в теплопроводящий поток энергии (см. VI, § 126).

творяют принципу симметрии (*принцип Онсагера*), который может быть установлен в общем виде, без рассмотрения конкретных релаксационных механизмов. Но при конкретном вычислении кинетических коэффициентов с помощью кинетических уравнений принцип симметрии не дает каких-либо условий, которые должны были бы дополнительно налагаться на решение уравнений. При таком вычислении требования этого принципа удовлетворяются, разумеется, автоматически. Полезно проследить за тем, каким образом это происходит.

Напомним, что в общей формулировке принципа Онсагера (см. V, § 120) фигурирует набор величин  $x_a$ , характеризующих неравновесность системы, и набор «термодинамически сопряженных» с ними величин  $X_a = -\partial S/\partial x_a$  ( $S$  — энтропия системы). Процесс релаксации слабо неравновесной системы описывается уравнениями, определяющими скорости изменения величин  $x_a$  в виде линейных функций величин  $X_a$ :

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b, \quad (9.1)$$

где  $\gamma_{ab}$  — кинетические коэффициенты. Согласно принципу Онсагера, если  $x_a$  и  $x_b$  одинаково ведут себя при обращении времени,

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \quad (9.2)$$

При этом скорость изменения энтропии дается квадратичной формой

$$\dot{S} = -\sum_a X_a \dot{x}_a = \sum_{a,b} \gamma_{ab} X_a X_b. \quad (9.3)$$

Первым из этих выражений часто бывает удобным пользоваться для установления соответствия между величинами  $x_a$  и  $X_a$ .

В случае теплопроводности в качестве «скоростей»  $x_a$  рассматриваем компоненты  $q'_\alpha$  вектора диссипативного теплового потока (в каждой заданной точке среды); индекс  $a$  совпадает при этом с векторным индексом  $\alpha$ . Соответствующими величинами  $X_a$  будут тогда производные  $T^{-2} \partial T / \partial x_\alpha$  (ср. IX, § 88). Роль уравнений (9,1) играют равенства  $q'_\alpha = -\kappa_{\alpha\beta} \partial T / \partial x_\beta$ , так что кинетическими коэффициентами  $\gamma_{ab}$  являются величины  $T^2 \kappa_{\alpha\beta}$ . Согласно принципу Онсагера должно быть  $\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta\alpha}$ .

Аналогичным образом, в случае вязкости в качестве величин  $x_a$  рассматриваем компоненты тензора вязкого потока импульса  $\sigma_{\alpha\beta}$ , а соответствующими  $X_a$  являются  $-V_{\alpha\beta}/T$  (индексу  $a$  отвечает при этом пара тензорных индексов  $\alpha\beta$ ). Роль уравнения (9,1) играют соотношения  $\sigma'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\gamma\delta}$ , а кинетическими коэффициен-

тами являются величины  $T\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Согласно принципу Онсагера должно быть  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}$ .

В рассмотренных в предыдущих параграфах задачах о теплопроводности и вязкости газов указанная симметрия тензоров  $\kappa_{\alpha\beta}$  и  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  возникла автоматически уже как следствие изотропии среды, безотносительно к решению кинетического уравнения. Покажем, однако, что эта симметрия возникла бы и в результате решения кинетического уравнения, безотносительно к изотропии газа.

Схема решения задач о теплопроводности и вязкости в слабо неоднородном газе состояла в том, что поправка к равновесной функции распределения ищется в виде

$$\chi = \sum_a g_a(\Gamma) X_a \quad (9,4)$$

и для функций  $g_a$  получаются уравнения вида

$$L_a = I(g_a). \quad (9,5)$$

Величинами  $L_a$  являются компоненты вектора

$$T[\varepsilon(\Gamma) - c_p T] v_\alpha$$

в случае теплопроводности, или тензора

$$-T \left[ m v_\alpha v_\beta - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v} \delta_{\alpha\beta} \right]$$

в случае вязкости (ср. (6,19)). Решения уравнений (9,5) должны удовлетворять дополнительным условиям

$$\int f_0 g_a d\Gamma = 0, \quad \int f_0 g_a \varepsilon d\Gamma = 0, \quad \int f_0 g_a p d\Gamma = 0.$$

С учетом этих условий кинетические коэффициенты  $\gamma_{\alpha\beta}$  могут быть записаны в виде интегралов

$$T^2 \gamma_{ab} = - \int f_0 L_a g_b d\Gamma. \quad (9,6)$$

Доказательство симметрии  $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$  сводится, таким образом, к доказательству равенства интегралов

$$\int f_0 L_a g_b d\Gamma = \int f_0 L_b g_a d\Gamma. \quad (9,7)$$

Оно основано на свойстве «самосопряженности» линейризованного оператора  $I$ , к которому можно прийти следующим образом.

Рассмотрим интеграл

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 f_{01} \omega' \varphi (\psi' + \psi'_1 - \psi - \psi_1) d^4\Gamma,$$

где  $\psi(\Gamma)$ ,  $\varphi(\Gamma)$  — любые две функции переменных  $\Gamma$ . Поскольку интегрирование производится по всем переменным  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Gamma'_1$ , можно, не меняя интеграла, произвести любое их переобозначение (как это делалось уже в § 4). Произведем переобозначение  $\Gamma$ ,  $\Gamma' \leftrightarrow \Gamma_1$ ,  $\Gamma'_1$ , а затем в каждом из двух получающихся таким образом форм интеграла — еще переобозначение  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma'$ ,  $\Gamma'_1$ . Взяв сумму всех четырех выражений, имеем

$$\begin{aligned} \int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma &= \\ &= \frac{1}{4} \int f_0 f_{01} [\omega'(\varphi + \varphi_1) - \omega(\varphi' + \varphi'_1)] [(\psi' + \psi'_1) - (\psi + \psi_1)] d^4\Gamma \end{aligned} \quad (9,8)$$

(обозначения  $\omega$  и  $\omega'$  из (3,5)). Рассмотрим теперь такой же интеграл, в котором функции  $\psi(\Gamma)$  и  $\varphi(\Gamma)$  заменены соответственно на  $\varphi(\Gamma^T)$  и  $\psi(\Gamma^T)$  (не меняя при этом переменных в  $\omega$  и  $\omega'$ ). Произведя в этом интеграле переобозначение  $\Gamma^T$ ,  $\Gamma_1^T, \dots \rightarrow \Gamma$ ,  $\Gamma_1, \dots$  и воспользовавшись принципом детального равновесия (2,3), получим

$$\begin{aligned} \int f_0 \psi^T I(\varphi^T) d\Gamma &= \\ &= \frac{1}{4} \int f_0 f_{01} [\omega(\psi + \psi_1) - \omega'(\psi' + \psi'_1)] [(\varphi' + \varphi'_1) - (\varphi + \varphi_1)] d^4\Gamma \end{aligned} \quad (9,9)$$

(учтено также, что  $f_0(\Gamma^T) = f_0(\Gamma)$ ). Раскрыв в (9,8) и (9,9) квадратные скобки и сравнив их почленно, убедимся, что оба интеграла равны друг другу. При сравнении надо учесть соотношение унитарности (2,9), в силу которого имеем, например,

$$\int f_0 f_{01} \omega(\psi + \psi_1)(\varphi + \varphi_1) d^4\Gamma = \int f_0 f_{01} \omega'(\psi + \psi_1)(\varphi + \varphi_1) d^4\Gamma$$

(соотношение (2,9) применено здесь к интегрированию по переменным  $\Gamma'$ ,  $\Gamma'_1$ , от которых в подынтегральном выражении зависят только  $\omega$  и  $\omega'$ ).

Таким образом, приходим к равенству

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 \psi^T I(\varphi^T) d\Gamma. \quad (9,10)$$

Отметим, что если принцип детального равновесия справедлив в своей простейшей форме (2,8),  $\omega = \omega'$ , то соотношение (9,10) сводится к буквальной самосопряженности оператора  $I$ :

$$\int f_0 \varphi I(\psi) d\Gamma = \int f_0 \psi I(\varphi) d\Gamma, \quad (9,11)$$

где в обоих интегралах фигурируют функции  $\varphi$  и  $\psi$  одних и тех же переменных  $\Gamma$  (это сразу очевидно при  $\omega = \omega'$  из выражения (9,8)).

Возвращаясь к кинетическим коэффициентам, произведем в первом интеграле (9,7) переобозначение  $\Gamma \rightarrow \Gamma^T$  и учтем, что

$$L_a(\Gamma^T) = \pm L_a(\Gamma) \quad (9,12)$$

(верхний знак относится к случаю вязкости, нижний — теплопроводности). Воспользуемся теперь соотношениями (9,5) и (9,10). При этом в (9,10) можно производить интегрирование по  $\Gamma^T$  вместо  $\Gamma$ , значение интеграла от этого, очевидно, не изменится. Имеем

$$\begin{aligned} \int f_0 g_b L_a d\Gamma &= \pm \int f_0 g_b^T I(g_a) d\Gamma^T = \\ &= \pm \int f_0 g_a^T I(g_b) d\Gamma^T = \pm \int f_0 g_a^T L_b(\Gamma) d\Gamma^T. \end{aligned}$$

Теперь достаточно переобозначить в правой стороне равенства  $\Gamma^T \rightarrow \Gamma$ , и с учетом (9,12) мы получим требуемый результат (9,7).

Кинетические коэффициенты должны удовлетворять также и условиям, следующим из закона возрастания энтропии; в частности, должны быть положительны «диагональные» коэффициенты  $\gamma_{aa}$ . Поскольку кинетическое уравнение обеспечивает возрастание энтропии, то естественно, что при вычислении с его помощью кинетических коэффициентов эти условия удовлетворяются автоматически.

Возрастание энтропии выражается неравенством

$$-\int \ln f \cdot \text{St} f d\Gamma > 0$$

(см. § 4). Подставив сюда

$$f = f_0 \left(1 + \frac{\chi}{T}\right), \quad \text{St} f = \frac{f_0}{T} I(\chi),$$

имеем

$$-\int \ln f_0 \text{St} f d\Gamma - \frac{1}{T} \int f_0 \ln \left(1 + \frac{\chi}{T}\right) I(\chi) d\Gamma > 0.$$

Первый интеграл обращается в нуль тождественно, а во втором пишем, ввиду малости  $\chi$ ,  $\ln(1 + \chi/T) \approx \chi/T$  и находим

$$-\int f_0 \chi I(\chi) d\Gamma > 0. \quad (9,13)$$

Этим неравенством и обеспечиваются необходимые свойства кинетических коэффициентов. В частности, при  $\chi = g_a$  оно выражает собой положительность  $\gamma_{aa}$ .

## § 10. Приближенное решение кинетического уравнения

Ввиду сложности закона взаимодействия молекул (в особенности многоатомных), определяющего функцию  $\psi$  в интеграле столкновений, уравнение Больцмана по существу не может быть даже записано для конкретных газов в точном виде. Но и при простых предположениях о характере молекулярного взаимодействия сложность математической структуры кинетического уравнения делает, вообще говоря, невозможным нахождение его решения в точном аналитическом виде; это относится даже к линейризованному уравнению. В связи с этим в кинетической теории газов приобретают особое значение достаточно эффективные методы приближенного решения уравнения Больцмана. Изложим здесь идею такого метода в применении к одноатомному газу (*S. Chapman*, 1916).

Рассмотрим сначала задачу о теплопроводности. Для одноатомного газа теплоемкость  $c_p = 5/2$  и линейризованное уравнение (7,3) принимает вид

$$-v \left( \frac{5}{2} - \beta v^2 \right) = I(g) \quad (10,1)$$

(где  $\beta = m/2T$ ); линейный интегральный оператор  $I(g)$  определяется формулой

$$I(g) = \iint v_{огн} f_{01} (g' + g'_1 - g - g_1) d^3 p_1 d\sigma \quad (10,2)$$

(соответствующей интегралу столкновений (3,9)), а равновесная функция распределения<sup>1)</sup>

$$f_0(v) = \frac{N\beta^{3/2}}{m^3\pi^{3/2}} e^{-\beta v^2}. \quad (10,3)$$

Эффективный метод приближенного решения уравнения (10,1) основан на разложении искомых функций по полной системе взаимно ортогональных функций, в качестве которых особым удобством обладают так называемые полиномы Сонина (*D. Burnett*,

<sup>1)</sup> Функция распределения везде предполагается определенной по отношению к импульсному пространству. Это не мешает, однако, тому, что она может быть выражена, по соображениям удобства, через скорость  $v = p/m$ .