Этим неравенством и обеспечиваются необходимые свойства кинетических коэффициентов. В частности, при $\chi = g_a$ оно выражает собой положительность γ_{aa}.

§ 10. Приближенное решение кинетического уравнения

Ввиду сложности закона взаимодействия молекул (в особенности многоатомных), определяющего функцию w в интеграле столкновений, уравнение Больцмана по существу не может быть даже записано для конкретных газов в точном виде. Но и при простых предположениях о характере молекулярного взаимодействия сложность математической структуры кинетического уравнения делает, вообще говоря, невозможным нахождение его решения в точном аналитическом виде; это относится даже к линеаризованному уравнению. В связи с этим в кинетической теории газов приобретают особое значение достаточно эффективные методы приближенного решения уравнения Больцмана. Изложим здесь идею такого метода в применении к одноатомному газу (*S. Chapman*, 1916).

Рассмотрим сначала задачу о теплопроводности. Для одноатомного газа теплоемкость $c_p = 5/2$ и линеаризованное уравнение (7,3) принимает вид

$$-\mathbf{v}\left(\frac{5}{2}-\beta v^2\right) = I(\mathbf{g}) \tag{10,1}$$

(где $\beta = m/2T$); линейный интегральный оператор $I(g)$ определяется формулой

$$I(\mathbf{g}) = \iint v_{\text{отн}} f_{01}(\mathbf{g}' + \mathbf{g}_1' - \mathbf{g} - \mathbf{g}_1)\, d^3p_1\, d\sigma \tag{10,2}$$

(соответствующей интегралу столкновений (3,9)), а равновесная функция распределения[1])

$$f_0(v) = \frac{N\beta^{3/2}}{m^3\pi^{3/2}} e^{-\beta v^2}. \tag{10,3}$$

Эффективный метод приближенного решения уравнения (10,1) основан на разложении искомых функций по полной системе взаимно ортогональных функций, в качестве которых особым удобством обладают так называемые полиномы Сонина (*D. Burnett*,

[1]) Функция распределения везде предполагается определенной по отношению к импульсному пространству. Это не мешает, однако, тому, что она может быть выражена, по соображениям удобства, через скорость $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$.

1935). Эти функции определяются формулой[1])

$$S_r^s(x) = \frac{1}{s!} e^x x^{-r} \frac{d^s}{dx^s} e^{-x} x^{r+s}, \tag{10,4}$$

причем r — произвольное, а s — целое положительное число или нуль. В частности,

$$S_r^0 = 1, \quad S_r^1(x) = r + 1 - x. \tag{10,5}$$

Свойство ортогональности этих полиномов при заданном индексе r и различных индексах s:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^r S_r^s(x) S_r^{s'}(x)\, dx = \frac{\Gamma(r+s+1)}{s!} \delta_{ss'}. \tag{10,6}$$

Ищем решение уравнения (10,1) в виде разложения

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \frac{\beta}{N} \mathbf{v} \sum_{s=1}^{\infty} A_s S_{3/2}^s(\beta v^2). \tag{10,7}$$

Опустив в разложении член с $s=0$, мы тем самым автоматически удовлетворяем условию (7,4) (интеграл обращается в нуль в силу ортогональности полиномов с $s=0$ и $s \neq 0$). Выражение в скобках в левой стороне (10,1) есть полином $S_{3/2}^1(\beta v^2)$, так что уравнение принимает вид

$$-\mathbf{v} S_{3/2}^1(\beta v^2) = \frac{\beta}{N} \sum_{s=1}^{\infty} A_s I(\mathbf{v} S_{3/2}^s). \tag{10,8}$$

Умножив его с обеих сторон на $\mathbf{v} f_0(v) S_{3/2}^l(\beta v^2)$ и проинтегрировав по d^3p, получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{ls} A_s = \frac{15}{4} \delta_{l1}, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{10,9}$$

причем

$$a_{ls} = -\frac{\beta^2}{N^2} \int f_0 \mathbf{v} S_{3/2}^l I(\mathbf{v} S_{3/2}^s)\, d^3p = \frac{\beta^2}{4N^2} \{\mathbf{v} S_{3/2}^l, \mathbf{v} S_{3/2}^s\}, \tag{10,10}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} \{F, G\} = \int f_0(v) f_0(v_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \Delta(F) \Delta(G)\, d^3p\, d^3p_1 d\sigma, \\ \Delta(F) = F(\mathbf{v}') + F(\mathbf{v}_1') - F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}_1). \end{gathered} \tag{10,11}$$

[1]) Они отличаются лишь нормировкой и индексированием от обобщенных полиномов Лагерра:

$$S_r^s(x) = \frac{(-1)^r}{(r+s)!} L_{r+s}^r(x).$$

Уравнение с $l=0$ (10,9) отсутствует, поскольку $a_{0s}=0$ в силу сохранения импульса: $\Delta(\mathbf{v}S^0_{3/2})=\Delta(\mathbf{v})=0$. Коэффициент теплопроводности вычисляется подстановкой (10,7) в интеграл (7,7). Ввиду условия (7,4) этот интеграл (с $\varepsilon=mv^2/2$) можно представить в виде

$$\varkappa=-\frac{1}{3}\int f_0 S^1_{3/2}(\beta v^2)\,\mathbf{vg}\,d^3p$$

и в результате находим

$$\varkappa=\frac{5}{4}A_1. \tag{10,12}$$

В простоте правой стороны уравнений (10,9) и выражения (10,12) проявляется преимущество разложения по полиномам Сонина.

Ход вычислений для задачи о вязкости вполне аналогичен. Ищем решение уравнения (8,6) в виде

$$g_{\alpha\beta}=-\frac{\beta^2}{N^2}\left(v_\alpha v_\beta-\frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}\right)\sum_{s=0}^{\infty}B_s S^s_{5/2}(\beta v^2). \tag{10,13}$$

Подстановка в (8,6) с последующим умножением этого уравнения на

$$f_0(v)\,S^l_{5/2}(\beta v^2)\left(v_\alpha v_\beta-\frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}\right)$$

и интегрированием по d^3p приводит к системе уравнений

$$\sum_{s=0}^{\infty}b_{ls}B_s=5\delta_{l0},\qquad l=0,1,2,\ldots, \tag{10,14}$$

где

$$b_{ls}=\frac{\beta^3}{N^2}\left\{\left(v_\alpha v_\beta-\frac{v^2}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)S^l_{5/2},\ \left(v_\alpha v_\beta-\frac{v^2}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)S^s_{5/2}\right\}. \tag{10,15}$$

Для коэффициента вязкости из (8,9) получается

$$\eta=\frac{1}{4}mB_0. \tag{10,16}$$

Приближенное решение бесконечной системы уравнений (10,9) или (10,14) достигается сохранением в разложениях (10,7) или (10,13) лишь нескольких первых членов, т. е. искусственным обрывом системы. Сходимость процесса приближения при увеличении числа членов оказывается чрезвычайно быстрой: уже сохранение всего одного члена приводит, вообще говоря, к точности 1—2% в значении $\varkappa$ или η[1]).

[1]) Сходимость оказывается, однако, несколько хуже в задачах о диффузии и в особенности о термодиффузии.

Покажем, что приближенное решение линеаризованного кинетического уравнения для одноатомных газов, осуществляемое описанным способом, приводит к значениям кинетических коэффициентов, заведомо меньшим, чем дало бы точное решение этого уравнения.

Запишем кинетическое уравнение в символическом виде

$$I(g)=L \tag{10,17}$$

(где функции g и L—векторы в задаче о теплопроводности и тензоры второго ранга в задаче о вязкости). По функции g соответствующий кинетический коэффициент определяется как величина, пропорциональная интегралу

$$-\int f_0 gI(g)\,d^3p \tag{10,18}$$

(см. § 9). Приближенная же функция g удовлетворяет не самому уравнению (10,17), а лишь интегральному соотношению

$$\int f_0 gI(g)\,d^3p=\int f_0 Lg\,d^3p \tag{10,19}$$

(как это очевидно из способа определения коэффициентов в разложениях g).

Высказанное выше утверждение непосредственно следует из «вариационного принципа», согласно которому решение уравнения (10,17) осуществляет максимум функционала (10,18) в классе функций, удовлетворяющих условию (10,19). В справедливости этого принципа легко убедиться, рассмотрев интеграл

$$-\int f_0(g-\varphi)\,I(g-\varphi)\,d^3p,$$

где g—решение уравнения (10,17), а φ—любая пробная функция, удовлетворяющая лишь условию (10,19). По общему свойству (9,13) оператора I этот интеграл положителен. Раскрыв в нем скобки, пишем

$$-\int f_0\{gI(g)+\varphi I(\varphi)-\varphi I(g)-gI(\varphi)\}\,d^3p.$$

Поскольку для одноатомного газа принцип детального равновесия справедлив в форме (2,8), то оператор I обладает свойством самосопряженности (9,11)[1]. Поэтому интегралы от двух последних членов в фигурной скобке равны друг другу. Подставив затем $I(g)=L$, имеем

$$-\int f_0\{gI(g)+\varphi I(\varphi)-2\varphi I(g)\}\,d^3p=$$
$$=-\int f_0\{gI(g)+\varphi I(\varphi)-2L\varphi\}\,d^3p>0.$$

[1]) Подчеркнем, что вариационный принцип в сформулированном виде связан с этим обстоятельством и не имеет места при соблюдении принципа детального равновесия лишь в его наиболее общем виде (2,3).

Наконец, преобразовав интеграл от последнего члена с помощью условия (10,19), находим

$$-\int f_0 gI(g)\,d^3p > -\int f_0\,\varphi I(\varphi)\,d^3p,$$

что и требовалось доказать.

Упомянем о случае, представляющем интерес с формальной точки зрения, хотя он и не имеет прямого физического смысла. Это—газ из частиц, взаимодействующих по закону $U=\alpha/r^4$[1]. Этот случай характерен тем, что сечение столкновений таких частиц (определенное по классической механике) обратно пропорционально их относительной скорости $v_{\text{отн}}$, а потому фигурирующее в интеграле столкновений произведение $v_{\text{отн}}\,d\sigma$ оказывается зависящим только от угла рассеяния θ, но не от $v_{\text{отн}}$. В этом свойстве легко убедиться уже из соображений размерности. Действительно, сечение зависит всего от трех параметров: постоянной α, массы частиц m и скорости $v_{\text{отн}}$. Из этих величин нельзя составить безразмерной комбинации и всего одну комбинацию с размерностью площади: $v_{\text{отн}}^{-1}(\alpha/m)^{1/2}$; ей и должно быть пропорционально сечение. Это свойство сечения приводит к существенному упрощению структуры интеграла столкновений, в результате чего оказывается возможным найти точные решения линеаризованных кинетических уравнений задач о теплопроводности и вязкости. Оказывается, что они даются просто первыми членами разложений (10,7) и (10,13)[2].

Задачи[3]

1. Найти теплопроводность одноатомного газа, сохранив в разложении (10,7) лишь первый член.

Решение. При одном члене разложения уравнения (10,9) сводятся к равенству $A_1=15/4a_{11}$. Для вычисления интеграла (10,10) с $l=s=1$ вводим вместо $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}_1'$ скорость центра инерции и относительные скорости двух атомов:

$$\mathbf{V}=\frac{1}{2}(\mathbf{v}+\mathbf{v}_1)=\frac{1}{2}(\mathbf{v}'+\mathbf{v}_1'),\qquad \mathbf{v}_{\text{отн}}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_1,\qquad \mathbf{v}'_{\text{отн}}=\mathbf{v}'-\mathbf{v}_1',$$

$$v^2+v_1^2=2V^2+\frac{1}{2}v_{\text{отн}}^2,\qquad d^3p\,d^3p_1=m^6d^3V\,d^3v_{\text{отн}}.$$

Простое вычисление дает

$$\Delta\left(\mathbf{v}S^1_{3/2}\right)=\Delta\left(\beta v^2\mathbf{v}\right)=\beta\left[\left(\mathbf{V}\mathbf{v}'_{\text{отн}}\right)\mathbf{v}'_{\text{отн}}-\left(\mathbf{V}\mathbf{v}_{\text{отн}}\right)\mathbf{v}_{\text{отн}}\right].$$

---

[1]) Кинетические свойства такой газовой модели впервые рассматривались *Максвеллом* (1866).

[2]) Подробное изложение теории этого случая—см. §§ 38—40 статьи *Л. Вальдмана* в сборнике «Термодинамика газов», Москва, 1970 (перевод из Handbuch der Physik, Bd. XII, 1958).

[3]) Формулы (1)—(6) были получены *Чепменом* и *Энскогом*.

Возведя это выражение в квадрат и усреднив его по направлениям $\mathbf{V}$, получим

$$\frac{2\beta^2}{3}\left[v_{\text{отн}}^4-(\mathbf{v}_{\text{отн}}\mathbf{v}'_{\text{отн}})^2\right]V^2=\frac{2\beta^2}{3}v_{\text{отн}}^4V^2\sin^2\theta.$$

После выполнения интегрирования по $4\pi V^2\,dV$ и по направлениям $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ (последнее сводится к умножению на 4π) получим окончательно

$$a_{11}=\frac{\beta^4}{4}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{1/2}\int_0^\pi\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\beta v_{\text{отн}}^2}{2}\right)v_{\text{отн}}^7\sin^2\theta\frac{d\sigma}{d\theta}dv_{\text{отн}}\,d\theta; \qquad (1)$$

коэффициент теплопроводности

$$\varkappa=75/16a_{11}. \qquad (2)$$

2. То же для вязкости одноатомного газа.

Решение. Аналогичным образом имеем

$$B_0=5/b_{00}, \qquad \eta=5m/4b_{00}.$$

В интеграле (10,15) при $l=s=0$ находим

$$\Delta\left(v_\alpha v_\beta-\frac{1}{3}v^2\delta_{\alpha\beta}\right)=\frac{1}{2}\left(v_{\text{отн}\,\alpha}v_{\text{отн}\,\beta}-v'_{\text{отн}\,\alpha}v'_{\text{отн}\,\beta}\right).$$

Квадрат этого выражения есть

$$\frac{1}{2}v_{\text{отн}}^4\sin^2\theta.$$

После интегрирования по d^3V и по направлениям $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ оказывается, что $b_{00}=a_{11}$, так что

$$\eta=4m\varkappa/15. \qquad (3)$$

Для одноатомного газа теплоемкость $c_p=5/2$. Поэтому отношение кинематической вязкости $\nu=\eta/Nm$ к температуропроводности $\chi=\varkappa/Nc_p$ (так называемое число Прандтля) в рассматриваемом приближении оказывается равным

$$\nu/\chi=2/3 \qquad (4)$$

вне зависимости от закона взаимодействия атомов [1]).

3. В том же приближении найти теплопроводность и вязкость одноатомного газа, рассматривая атомы как твердые упругие шарики диаметра d.

Решение. Сечение рассеяния шарика на шарике эквивалентно рассеянию точечной частицы на непроницаемой сфере радиуса d; поэтому сечение $d\sigma=(d/2)^2do$. Вычисление интеграла (1) приводит к результатам [2])

$$\varkappa=\frac{75}{64\sqrt{\pi}\,d^2}\sqrt{\frac{T}{m}}=\frac{0,66}{d^2}\sqrt{\frac{T}{m}}, \qquad (5)$$

$$\eta=\frac{5}{16\sqrt{\pi}\,d^2}\sqrt{mT}=0,18\frac{\sqrt{mT}}{d^2}. \qquad (6)$$

---

[1]) Для газа с законом взаимодействия частиц $U=\alpha/r^4$ формулы (1)—(4) являются точными и приводят к следующим значениям:

$$\varkappa=3,04T\,(m\alpha)^{-1/2}, \qquad \eta=0,81T\,(m/\alpha)^{1/2}.$$

[2]) Для характеристики быстроты сходимости последовательных приближений укажем, что при учете второго и третьего членов в разложениях (10,7) и (10,13) выражения (5) и (6) умножаются соответственно на $(1+0,015+0,001)$ и $(1+0,023+0,002)$.