При малой же концентрации тяжелого газа (12,4) дает

$$A = 3/2\sqrt{2\pi} = 0,6.$$

Обратим внимание на близость значений $A$ в обоих предельных случаях.

## § 13. Кинетические явления в газе во внешнем поле

Вращательные степени свободы молекул создают тот механизм, через который внешнее магнитное или электрическое поле может оказывать влияние на кинетические явления в газе¹). Характер этого влияния одинаков в магнитном и электрическом случаях; будем говорить сначала о газе в магнитном поле.

Вращающаяся молекула обладает, вообще говоря, магнитным моментом, среднее (в квантовомеханическом смысле) значение которого обозначим через $\mu$. Магнитное поле будем предполагать ограниченным по величине настолько, что произведение $\mu B$ мало по сравнению с интервалами тонкой структуры молекулярных уровней²). Тогда можно пренебречь влиянием поля на состояние молекулы, так что магнитный момент вычисляется по ее невозмущенному состоянию. При не слишком низких температурах (которые мы и рассматриваем) величина $\mu B$ будет мала также и по сравнению с $T$; это позволяет пренебречь влиянием поля на равновесную функцию распределения молекул газа.

Магнитный момент направлен вдоль вращательного момента молекулы $\mathbf{M}$; напишем его в виде

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{M}. \tag{13,1}$$

Классическому вращению молекулы отвечают большие вращательные квантовые числа; при этом можно пренебречь в $\mathbf{M}$ различием между полным (включающим спин) и вращательным моментами. Значение постоянного коэффициента $\gamma$ зависит от рода молекулы и природы ее магнитного момента. Так, для двухатомной молекулы с отличным от нуля спином $S$ имеем

$$\gamma \approx \frac{2\sigma}{M}\mu_B, \tag{13,2}$$

где $\mu_B$—магнетон Бора, а число $\sigma = J - K$—разность между квантовыми числами полного момента $J$ и вращательного момента $K$ (эта разность пробегает значения $S, S-1, \ldots, -S$); в знаменателе же различие между $J$ и $K$ несущественно: $M \approx$

¹) Этот механизм был указан *Ю. М. Каганом* и *Л. А. Максимовым* (1961); им же принадлежат излагаемые в этом параграфе результаты.

²) Напомним, что в макроскопической электродинамике среднее (по физически бесконечно малым объемам) значение напряженности магнитного поля называется магнитной индукцией и обозначается как $\mathbf{B}$. При малой плотности среды—в газе—ее намагниченностью можно пренебречь, и тогда вектор $\mathbf{B}$ совпадает с вектором макроскопической напряженности $\mathbf{H}$.

$\approx \hbar J \approx \hbar K$. В формуле (13,2) предполагается, что взаимодействие спин—ось в молекуле мало по сравнению с интервалами вращательной структуры уровней (случай $b$ по Гунду)[1]).

В магнитном поле **B** на молекулу действует момент сил, равный $[\mu\mathbf{B}]$. Под его влиянием вектор **M** перестает быть постоянным в течение «свободного» движения молекулы и меняется согласно уравнению

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=[\mu\mathbf{B}]=-\gamma[\mathbf{BM}] \tag{13,3}$$

—вектор **M** прецессирует вокруг направления поля с угловой скоростью $-\gamma\mathbf{B}$. В связи с этим в левую сторону кинетического уравнения должен быть добавлен член $(\partial f/\partial\mathbf{M})\dot{\mathbf{M}}$, так что уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\gamma[\mathbf{MB}]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}=\mathrm{St}\, f. \tag{13,4}$$

В число переменных Г, от которых зависит функция распределения, должна быть включена также и дискретная переменная $\sigma$, определяющая значение магнитного момента (если таковая имеется, как в (13,2)).

В задачах о теплопроводности и вязкости снова рассматриваем распределение, близкое к равновесному, представив его в виде

$$f=f_0(1+\chi/T). \tag{13,5}$$

Покажем прежде всего, что член с производной $\partial f_0/\partial\mathbf{M}$ в кинетическом уравнении выпадает. Действительно, поскольку $f_0$ зависит только от энергии молекулы $\varepsilon(\Gamma)$, а производная $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{M}$ есть угловая скорость $\mathbf{\Omega}$, то

$$\gamma[\mathbf{MB}]\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{M}}=\gamma([\mathbf{MB}]\mathbf{\Omega})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \tag{13,6}$$

Для молекул типа ротатора и шарового волчка направления **M** и $\mathbf{\Omega}$ совпадают, так что выражение (13,6) обращается в нуль тождественно. В других же случаях оно обращается в нуль после усреднения по быстро меняющимся фазам, необходимость которого была объяснена в § 1. При вращении молекул типа симметрического или асимметрического волчка быстро меняется как направление осей самой молекулы, так и направление ее угловой скорости $\mathbf{\Omega}$. После указанного усреднения в $\mathbf{\Omega}$ может остаться

[1]) Формула (13,2) получается из точной (для случая $b$) формулы, найденной в задаче 3, III, § 113, путем перехода к пределу больших $J$ и $K$ при заданной разности $J-K$. Вклад орбитального момента $\Lambda$ при этом исчезает (он оказывается величиной следующего порядка малости по $1/J$).

лишь составляющая $\Omega_M$ вдоль постоянного вектора **M**, но для такой составляющей произведение $[\mathbf{MB}]\Omega_M=0$.

Остальные члены в кинетическом уравнении преобразуются так же, как это было сделано в § 7 или § 8. Так, для задачи о теплопроводности находим уравнение

$$\frac{\varepsilon(\Gamma)-c_pT}{T}\mathbf{v}\nabla T=-\gamma[\mathbf{MB}]\frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{M}}+I(\chi). \tag{13,7}$$

Решение этого уравнения снова надо искать в виде $\chi=\mathbf{g}\nabla T$, но для составления векторной функции $\mathbf{g}(\Gamma)$ мы имеем в своем распоряжении уже не два, а три вектора: **v**, **M**, **B**. Внешнее поле создает в газе избранное направление. В связи с этим процесс теплопроводности становится анизотропным и вместо скалярного коэффициента $\varkappa$ надо ввести тензор теплопроводности $\varkappa_{\alpha\beta}$, определяющий тепловой поток согласно

$$q_\alpha=-\varkappa_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial x_\beta}. \tag{13,8}$$

Тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$ вычисляется по функции распределения как интеграл

$$\varkappa_{\alpha\beta}=-\frac{1}{T}\int f_0\varepsilon v_\alpha g_\beta\,d\Gamma \tag{13,9}$$

(ср. (7,5)).

Общий вид тензора второго ранга, зависящего от вектора **B**, есть

$$\varkappa_{\alpha\beta}=\varkappa\delta_{\alpha\beta}+\varkappa_1b_\alpha b_\beta+\varkappa_2e_{\alpha\beta\gamma}b_\gamma, \tag{13,10}$$

где $\mathbf{b}=\mathbf{B}/B$, $e_{\alpha\beta\gamma}$—единичный антисимметричный тензор, а $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$—скаляры, зависящие от абсолютной величины поля $B$. Тензор (13,10) обладает, очевидно, свойством [1])

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\mathbf{B})=\varkappa_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}). \tag{13,11}$$

Выражению (13,10) отвечает тепловой поток

$$\mathbf{q}=-\varkappa\nabla T-\varkappa_1\mathbf{b}(\mathbf{b}\nabla T)-\varkappa_2[\nabla T\cdot\mathbf{b}]. \tag{13,12}$$

Последний член здесь представляет собой, как говорят, *нечетный эффект:* эта часть теплового потока меняет знак при изменении знака поля.

Интегральный член $I(\chi)$ в правой стороне уравнения (13,7) дается формулой (6,5). В его подынтегральном выражении содержится функция $f_0$, пропорциональная плотности газа $N$. Выделив этот множитель и разделив на него обе стороны уравне-

[1]) Это свойство выражает собой принцип симметрии кинетических коэффициентов в присутствии магнитного поля. В данном случае оно оказывается автоматическим следствием наличия всего одного вектора **b**, с помощью которого строится тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$.

ния, найдем, что $N$ входит в уравнение только в комбинациях $\mathbf{B}/N$ и $\nabla T/N$ с полем и градиентом температуры. Отсюда ясно, что функция $f_0\chi = f_0\mathbf{g}\nabla T$ будет зависеть от параметров $N$ и $B$ только в виде отношения $B/N$; только от этой же величины будут зависеть и интегралы (13,9), а тем самым и коэффициенты $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ в (13,12). Плотность $N$ пропорциональна (при заданной температуре) давлению газа $P$. Таким образом, теплопроводность газа в магнитном поле зависит от величины поля и от давления только через отношение $B/P$[1]).

При увеличении $B$ первый член в правой стороне уравнения (13,7) возрастает, а второй не меняется. Отсюда ясно, что в пределе $B \to \infty$ решение уравнения должно представлять собой функцию, зависящую только от направления (но не от величины) поля, причем эта функция должна обращать тождественно в нуль член $[\mathbf{MB}]\,\partial\chi/\partial\mathbf{M}$ в уравнении; соответственно коэффициенты $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ стремятся при $B \to \infty$ к постоянным (не зависящим от $B$) пределам.

Аналогичным образом рассматривается задача о вязкости газа в магнитном поле. Соответствующее кинетическое уравнение имеет вид

$$\left(mv_\alpha v_\beta - \frac{\varepsilon(\Gamma)}{c_v}\delta_{\alpha\beta}\right)V_{\alpha\beta} = I(\chi) - \gamma[\mathbf{MB}]\frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{M}} \tag{13,13}$$

(ср. (6,19)). Решение этого уравнения надо искать в виде $\chi = g_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}$. Вместо двух коэффициентов вязкости $\eta$ и $\zeta$ надо ввести теперь тензор четвертого ранга $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$, определяющий тензор вязких напряжений согласно

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}V_{\gamma\delta}; \tag{13,14}$$

по определению тензор $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен по парам индексов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, $\delta$. По известной функции $\chi$ его компоненты вычисляются как интегралы

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\int mv_\alpha v_\beta f_0 g_{\gamma\delta}\,d\Gamma. \tag{13,15}$$

Вычисленный таким образом тензор вязкости будет автоматически удовлетворять условию

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{B}) = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(-\mathbf{B}), \tag{13,16}$$

выражающему собой принцип симметрии кинетических коэффициентов.

С помощью вектора $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ (и единичных тензоров $\delta_{\alpha\beta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$) можно составить следующие независимые тензорные комбинации

[1]) Изменение теплопроводности газа в магнитном поле называют *эффектом Зенфтлебена.*

со свойствами симметрии тензора $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\begin{aligned}
&1)\ \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma},\\
&2)\ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta},\\
&3)\ \delta_{\alpha\gamma}b_\beta b_\delta+\delta_{\beta\gamma}b_\alpha b_\delta+\delta_{\alpha\delta}b_\beta b_\gamma+\delta_{\beta\delta}b_\alpha b_\gamma,\\
&4)\ \delta_{\alpha\beta}b_\gamma b_\delta+\delta_{\gamma\delta}b_\alpha b_\beta,\\
&5)\ b_\alpha b_\beta b_\gamma b_\delta,\\
&6)\ b_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+b_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta}+b_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}+b_{\beta\delta}\delta_{\alpha\gamma},\\
&7)\ b_{\alpha\gamma}b_\beta b_\delta+b_{\beta\gamma}b_\alpha b_\delta+b_{\alpha\delta}b_\beta b_\gamma+b_{\beta\delta}b_\alpha b_\gamma,
\end{aligned}\tag{13,17}$$

где $b_{\alpha\beta}=-b_{\beta\alpha}=e_{\alpha\beta\gamma}b_\gamma$. Во всех этих комбинациях, за исключением четвертой, свойство (13,16) возникает автоматически как следствие симметрии по парам индексов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, $\delta$; в четвертом же выражении объединение двух членов вызывается лишь условием (13,16)[1]).

Соответственно числу тензоров (13,17) газ в магнитном поле характеризуется в общем случае семью независимыми коэффициентами вязкости. Определим их как коэффициенты в следующем выражении тензора вязких напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\alpha\beta}&=2\eta\left(V_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right)+\zeta\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}+\\
&+\eta_1(2V_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}+\delta_{\alpha\beta}V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta-2V_{\alpha\gamma}b_\gamma b_\beta-\\
&\qquad-2V_{\beta\gamma}b_\gamma b_\alpha+b_\alpha b_\beta\operatorname{div}\mathbf{V}+b_\alpha b_\beta V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta)+\\
&+2\eta_2(V_{\alpha\gamma}b_\gamma b_\beta+V_{\beta\gamma}b_\gamma b_\alpha-2b_\alpha b_\beta V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta)+\\
&+\eta_3(V_{\alpha\gamma}b_{\beta\gamma}+V_{\beta\gamma}b_{\alpha\gamma}-V_{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_\beta b_\delta-V_{\gamma\delta}b_{\beta\gamma}b_\alpha b_\delta)+\\
&+2\eta_4(V_{\gamma\delta}b_{\alpha\gamma}b_\beta b_\delta+V_{\gamma\delta}b_{\beta\gamma}b_\alpha b_\delta)+\zeta_1(\delta_{\alpha\beta}V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta+b_\alpha b_\beta\operatorname{div}\mathbf{V})
\end{aligned}\tag{13,18}$$

($V_{\alpha\beta}$ определено в (6,12)). Оно составлено таким образом, что $\eta$, $\eta_1$, ..., $\eta_4$ стоят коэффициентами при тензорах, обращающихся в нуль при упрощении по индексам $\alpha$, $\beta$. Коэффициенты же $\zeta$ и $\zeta_1$ стоят при тензорах с отличным от нуля следом; их можно назвать коэффициентами второй вязкости. Обратим внимание на то, что они содержат не только скаляр $\operatorname{div}\mathbf{V}$, но и $V_{\gamma\delta}b_\gamma b_\delta$. Первые два члена в (13,18) соответствуют обычному выражению тензора напряжений, так что $\eta$ и $\zeta$—обычные коэффициенты вязкости.

Отметим, что тензоры $\varkappa_{\alpha\beta}$ и $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ автоматически оказываются истинными тензорами, так что эти выражения удовлетворяют требованию симметрии по отношению к инверсии. Поэтому отказ от этого требования (для газа стереоизомерного вещества) не привел бы к появлению в них каких-либо новых членов.

---

[1]) Комбинации из членов с двумя множителями $b_{\alpha\beta}$ писать не надо: поскольку произведение двух тензоров $e_{\alpha\beta\gamma}$ сводится к произведениям тензоров $\delta_{\alpha\beta}$, такие комбинации сводятся к уже выписанным в (13,17).

Такой отказ приводит, однако, к появлению новых эффектов—возникновению теплового потока $q^{(V)}$ под влиянием градиентов скорости и возникновению вязких напряжений $\sigma'^{(T)}$ под влиянием градиента температуры. Эти (так называемые *перекрестные*) эффекты описываются формулами вида

$$q_\gamma^{(V)}=c_{\gamma,\,\alpha\beta}V_{\alpha\beta},\quad \sigma_{\alpha\beta}'^{(T)}=-a_{\alpha\beta,\,\gamma}\frac{\partial T}{\partial x_\gamma},\tag{13,19}$$

где $c_{\gamma,\,\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta,\,\gamma}$—тензоры третьего ранга, симметричные по паре индексов, отделенных запятой. При указанном в § 9 выборе величин $\dot{x}_a$ и $X_a$ кинетическими коэффициентами $\gamma_{ab}$ и $\gamma_{ba}$ являются $Tc_{\gamma,\,\alpha\beta}$ и $T^2a_{\alpha\beta,\,\gamma}$. Поэтому в силу принципа Онсагера при наличии магнитного поля должно быть

$$Ta_{\alpha\beta,\,\gamma}(\mathbf{B})=c_{\gamma,\,\alpha\beta}(-\mathbf{B}).\tag{13,20}$$

Общий вид таких тензоров:

$$a_{\alpha\beta,\,\gamma}=a_1b_\alpha b_\beta b_\gamma+a_2b_\gamma\delta_{\alpha\beta}+\\+a_3(b_\alpha\delta_{\beta\gamma}+b_\beta\delta_{\alpha\gamma})+a_4(b_{\alpha\gamma}b_\beta+b_{\beta\gamma}b_\alpha).\tag{13,21}$$

Все члены в этом выражении—псевдотензоры, так что соотношения (13,19) с такими коэффициентами не инвариантны по отношению к инверсии.

Остановимся коротко на кинетических явлениях в газе в электрическом поле. Рассмотрим газ, состоящий из полярных (т. е. обладающих дипольным моментом $\mathbf{d}$) молекул типа симметрического волчка. В электрическом поле на полярную молекулу действует момент сил $[\mathbf{dE}]$, так что в кинетическом уравнении появится член

$$\dot{\mathbf{M}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}=[\mathbf{dE}]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}}.$$

Направление $\mathbf{d}$ совпадает с осью молекулы и не имеет отношения к ее вращательному моменту $\mathbf{M}$. Однако в результате усреднения по быстрой прецессии оси волчка вокруг направления постоянного вектора $\mathbf{M}$ в написанном члене останется лишь проекция $d$ на направление $\mathbf{M}$ и он примет вид

$$\gamma[\mathbf{ME}]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}},\tag{13,22}$$

где $\gamma=\sigma d/M$, причем переменная $\sigma$ (косинус угла между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{M}$) пробегает теперь непрерывный ряд значений в интервале от $-1$ до $+1$. Выражение (13,22) отличается от соответствующего члена в магнитном случае лишь заменой $\mathbf{B}$ на $\mathbf{E}$. Поэтому остаются в силе и все написанные выше кинетические уравнения и следствия из них[1]).

Некоторое отличие возникает, однако, в связи с тем, что электрическое поле **E** — истинный (а не псевдо) вектор и что оно не меняется при обращении времени. В силу последнего обстоятельства принцип Онсагера для тензоров теплопроводности и вязкости выразится теперь равенствами

$$\varkappa_{\alpha\beta}(\mathbf{E}) = \varkappa_{\beta\alpha}(\mathbf{E}), \quad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{E}) = \eta_{\gamma\delta\alpha\beta}(\mathbf{E}) \tag{13,23}$$

вместо (13,11) и (13,16). Соответственно в выражениях (13,10) и (13,18) (где теперь $\mathbf{b} = \mathbf{E}/E$) будет $\varkappa_2 \equiv 0$, $\eta_3 = \eta_4 \equiv 0$[2]). В то же время перекрестные эффекты оказываются возможными не только в газе стереоизомерного вещества (где выражение (13,21) остается в силе целиком), но и в газе из нестереоизомерных молекул: выражение (13,21) с $a_4 \equiv 0$ является теперь истинным тензором.

## § 14. Явления в слабо разреженных газах

Гидродинамические уравнения движения газа с учетом процессов теплопроводности и внутреннего трения содержат тепловой поток $\mathbf{q}'$ (диссипативная часть потока энергии $\mathbf{q}$) и тензор вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$ (диссипативная часть потока импульса $\Pi_{\alpha\beta}$). Эти уравнения приобретают реальный смысл после того, как $\mathbf{q}'$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$ выражены через градиенты температуры и скорости газа. Но обычные выражения, линейные по этим градиентам, представляют собой лишь первые члены разложения по степеням малого отношения $l/L$ — длины свободного пробега к характерным размерам задачи (его называют *числом Кнудсена* K). Если это отношение не очень мало, может иметь смысл введение поправок, учитывающих члены следующего порядка малости по $l/L$. Такие поправки возникают как в самих уравнениях движения, так и в граничных условиях к ним на поверхности обтекаемых газом тел.

Последовательные члены разложений потоков $\mathbf{q}'$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$ выражаются через пространственные производные температуры, давления и скорости различных порядков и в различных степенях. Эти члены должны вычисляться в принципе путем перехода к следующим приближениям в решении кинетического уравнения. «Нулевому» приближению соответствует локально-равновесная

[1]) Двухатомные молекулы вращаются в плоскости, перпендикулярной **M**; поэтому для двухатомной полярной молекулы $\sigma = 0$. В таком случае влияние электрического поля на движение молекул проявляется в кинетическом уравнении лишь в квадратичном по полю приближении.

[2]) В газе из нестереоизомерных молекул отсутствие членов с $\varkappa_2$, $\eta_3$, $\eta_4$ в электрическом поле требуется и условием инвариантности по отношению к инверсии.