

§ 15. Явления в сильно разреженных газах

Рассмотренные в предыдущем параграфе явления представляют собой лишь поправочные эффекты, связанные с высшими степенями отношения длины свободного пробега l к характеристическим размерам задачи L ; это отношение по-прежнему предполагалось малым. Если же газ настолько разрежен (или размеры L настолько малы), что $l/L \geq 1$, то гидродинамические уравнения становятся вовсе неприменимыми, даже с исправленными граничными условиями.

В общем случае произвольного l/L требуется в принципе решать кинетическое уравнение с определенными граничными условиями на соприкасающихся с газом твердых поверхностях. Эти условия определяются взаимодействием молекул газа с поверхностью и связывают функцию распределения частиц, падающих на поверхность, с функцией распределения частиц, покидающих ее. Если это взаимодействие сводится к рассеянию молекул (без их химического превращения, ионизации или поглощения поверхностью), то оно описывается вероятностью $\omega(\Gamma', \Gamma) d\Gamma'$ — того, что молекула с заданными значениями Γ , столкнувшись с поверхностью, отразится от нее в заданный интервал $d\Gamma'$; функция ω нормирована условием

$$\int \omega(\Gamma', \Gamma) d\Gamma' = 1. \quad (15,1)$$

С помощью ω граничное условие для функции распределения $f(\Gamma)$ записывается в виде

$$\int_{nv < 0} \omega(\Gamma', \Gamma) nv f(\Gamma) d\Gamma = -nv' f(\Gamma') \quad \text{при } nv' > 0. \quad (15,2)$$

Интеграл в левой стороне представляет собой число молекул, падающих в 1 с на 1 см^2 поверхности и попадающих в результате рассеяния в заданный интервал $d\Gamma'$; интегрирование производится по области значений Γ , отвечающей молекулам, движущимся по направлению к поверхности (\mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела). Выражение же в правой стороне условия (15,2) есть число молекул, покидающих поверхность (за то же время и с той же площади); значения Γ' в обеих сторонах равенства должны отвечать молекулам, движущимся по направлению от поверхности.

В равновесии, когда температура газа совпадает с температурой тела, функция распределения как падающих, так и отраженных частиц должна быть бoльцмановской. Отсюда следует, что функция ω должна тождественно удовлетворять равенству

$$\int_{nv < 0} \omega(\Gamma', \Gamma) nv e^{-\varepsilon/T_1} d\Gamma = -nv' e^{-\varepsilon'/T_1}, \quad (15,3)$$

получающемуся подстановкой в (15,2) $f(\Gamma) = \text{const} \cdot \exp(-\epsilon/T_1)$, где T_1 —температура тела.

В описанной общей постановке решение задачи о движении сильно разреженного газа, конечно, весьма затруднительно. Задача может быть поставлена, однако, более простым образом в предельных случаях настолько сильного разрежения газа, что отношение $l/L \gg 1$.

Большая категория таких задач относится к ситуациям, когда значительная масса газа занимает объем, размеры которого велики как по сравнению с размерами L погруженных в газ твердых тел, так и по сравнению с длиной пробега l . Столкновения молекул с поверхностью тел происходят тогда сравнительно редко и несущественны по сравнению со взаимными столкновениями молекул. Если газ сам по себе находится в равновесии с некоторой температурой T_2 , то в этих условиях можно считать, что равновесие не нарушается погруженным в него телом. При этом между газом и телом могут существовать произвольные разности температур. То же самое относится и к скоростям макроскопического движения.

Пусть $\tau = T_2 - T_1$ есть разность между температурой газа и температурой некоторого участка df поверхности тела, а \mathbf{V} —скорость движения газа относительно тела. При отличных от нуля τ и \mathbf{V} возникает, во-первых, обмен теплом между газом и телом и, во-вторых, на тело действует со стороны газа некоторая сила. Обозначим плотность диссипативного потока тепла от газа к телу через q . Силу же, действующую в каждой точке поверхности тела по направлению \mathbf{n} внешней нормали к ней (и отнесенную к единице площади), обозначим как $\mathbf{F} = P\mathbf{n}$. Здесь второй член есть обычное давление газа, а \mathbf{F} —интересующая нас дополнительная сила, связанная с τ и \mathbf{V} . Величины q и \mathbf{F} являются функциями от τ и \mathbf{V} , обращающимися в нуль вместе с ними.

Если τ и \mathbf{V} достаточно малы (первое—по сравнению с самими температурами газа и тела, а второе—по сравнению с тепловой скоростью молекул газа), то можно разложить q и \mathbf{F} в ряд по степеням τ и \mathbf{V} , ограничившись линейными членами. Обозначим посредством F_n и V_n компоненты \mathbf{F} и \mathbf{V} по направлению нормали \mathbf{n} , а посредством F_t , \mathbf{u}_t —их тангенциальные составляющие; последние являются векторами с двумя независимыми компонентами. Тогда указанные разложения будут иметь вид

$$q = \alpha\tau + \beta V_n, \quad F_n = \gamma\tau + \delta V_n, \quad F_t = \theta V_t, \quad (15,4)$$

где α , β , γ , δ , θ —постоянные (вернее, функции температуры и давления), характерные для каждого данного газа и вещества твердого тела. «Скалярные» величины q и F_n не-могут, в силу со-

ображений симметрии, содержать членов, линейных по вектору \mathbf{V}_t . По такой же причине в разложении вектора \mathbf{F}_t отсутствуют члены, линейные по «скалярам» τ и V_n .

Величины α , δ , θ положительны. Так, если температура газа выше температуры тела ($\tau > 0$), то тепло будет переходить от газа к телу, т. е. соответствующая часть потока q будет положительна; поэтому $\alpha > 0$. Далее, действующие на тело силы F_n , F_t , обусловленные движением газа относительно тела, должны быть направлены в ту же сторону, куда направлены V_n и \mathbf{V}_t ; поэтому должно быть $\delta > 0$, $\theta > 0$. Что касается коэффициентов β и γ , то их знак не следует из общих термодинамических соображений (хотя, по-видимому, фактически они, как правило, положительны). Между ними имеется простое соотношение, являющееся следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов.

Для вывода этого соотношения вычислим производную по времени от полной энтропии всей системы, состоящей из газа вместе с находящимся в нем телом. В единицу времени тело получает от газа через каждый элемент поверхности df количество тепла $q df$. При этом энтропия тела S_1 испытывает приращение:

$$\dot{S}_1 = \oint \frac{q}{T_1} df,$$

где интегрирование производится по всей поверхности тела.

Для вычисления увеличения энтропии газа выбираем такую систему координат, в которой газ (в месте нахождения тела) покоится; в этой системе скорость каждой точки поверхности тела есть $-\mathbf{V}$. Для целей доказательства искомого соотношения будем считать, что форма тела может меняться при его движении; тогда скорости \mathbf{V} различных точек его поверхности будут являться произвольными независимыми переменными величинами. Согласно термодинамическому соотношению $dE = T dS - P d\mathcal{V}$ изменение энтропии газа в единицу времени равно

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T_2} (\dot{E}_2 + P_2 \dot{\mathcal{V}}_2)$$

(величины с индексом 2 относятся к газу). Производная \dot{E}_2 равна, в силу сохранения полной энергии системы, взятому с обратным знаком изменению энергии тела. Последнее складывается из количества тепла $\oint q df$ и произведенной над телом работы, равной интегралу $\oint (-\mathbf{V})(\mathbf{F} - Pn) df$. Отсюда находим для изменения

энергии газа:

$$\dot{E}_2 = \oint (-q + F_n V_n + F_t V_t - P_2 V_n) df.$$

Что касается изменения объема газа, то оно равно взятому с обратным знаком изменению объема тела:

$$\dot{V}_2 = \oint V_n df.$$

Таким образом, имеем для изменения энтропии газа:

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T_2} \oint (-q + F_n V_n + F_t V_t) df.$$

Складывая производные от S_1 и S_2 и полагая затем (при малых τ) $T_1 \approx T_2 \equiv T$, получаем окончательно для скорости изменения полной энтропии системы:

$$\dot{S} = \int \left[\frac{q\tau}{T^2} + \frac{F_n V_n}{T} + \frac{F_t V_t}{T} \right] df. \quad (15,5)$$

Выберем в качестве величин x_1, x_2, x_3, x_4 в общей формулировке принципа Онсагера (§ 9) соответственно q, F_n и две компоненты вектора F_t (в каждой заданной точке поверхности тела). Для выяснения смысла соответствующих величин X_a сравним формулу (15,5) с общим выражением скорости изменения энтропии (9,3). Мы увидим тогда, что величинами X_1, X_2, X_3, X_4 будут соответственно $-\tau/T^2, -V_n/T$ и две компоненты вектора $-V_t/T$ в той же точке. Кинетические же коэффициенты (коэффициенты в соотношениях (9,1)):

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \alpha T^2, & \gamma_{22} &= \delta T, & \gamma_{33} &= \gamma_{44} = \theta T, \\ \gamma_{12} &= \beta T, & \gamma_{21} &= \gamma T^2. \end{aligned}$$

Из симметрии $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ следует, таким образом, искомое соотношение

$$\beta = \gamma T. \quad (15,6)$$

Отметим также, что из условия положительности квадратичной формы (9,3) ($\dot{S} > 0$) следуют уже упомянутые неравенства $\alpha, \beta, \theta > 0$ и дополнительно еще и неравенство

$$T\alpha\delta > \beta^2.$$

Вычисление коэффициентов в (15,4) требует знания конкретного закона рассеяния молекул газа от поверхности тела, выражаемого введенной выше функцией $\omega(\Gamma', \Gamma)$. Для примера получим формулу, позволяющую в принципе вычислить величину α .

Плотность потока энергии от газа к телу выражается интегралом

$$q = \int (\varepsilon - \varepsilon') |v_x| \omega(\Gamma', \Gamma) f(\Gamma) d\Gamma d\Gamma' \quad (15,7)$$

(взятым по области $v_x < 0$, $v'_x > 0$), — при каждом столкновении молекулы со стенкой последней передается энергия $\varepsilon - \varepsilon'$.

Преобразуем это выражение с помощью принципа детального равновесия, согласно которому в состоянии равновесия число переходов $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ при рассеянии молекул от стенки равно числу переходов $\Gamma'^T \rightarrow \Gamma^T$. Это значит, что

$$\omega(\Gamma', \Gamma) |v_x| \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{T_1}\right) = \omega(\Gamma^T, \Gamma'^T) |v'_x| \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon'}{T_1}\right) \quad (15,8)$$

(в равновесии температура газа совпадает с температурой стенки).

Произведем в (15,7) переобозначение переменных интегрирования $\Gamma \rightarrow \Gamma'^T$, $\Gamma' \rightarrow \Gamma^T$. Взяв полусумму обоих получающихся выражений, напомним

$$q = \frac{1}{2} \int (\varepsilon - \varepsilon') e^{\mu/T_2} \times \\ \times [\omega(\Gamma', \Gamma) |v_x| e^{-\varepsilon/T_2} - \omega(\Gamma^T, \Gamma'^T) |v'_x| e^{-\varepsilon'/T_2}] d\Gamma d\Gamma'.$$

Наконец, подставив сюда $\omega(\Gamma^T, \Gamma'^T)$ из (15,8) и разложив затем подынтегральное выражение по степеням малой разности $\tau = T_2 - T_1$, найдем, что $q = \alpha \tau$, где

$$\alpha = \frac{1}{2T_1^2} \int (\varepsilon - \varepsilon')^2 |v_x| \omega(\Gamma', \Gamma) \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon(\Gamma)}{T_1}\right) d\Gamma d\Gamma' \\ (v_x < 0, v'_x > 0) \quad (15,9)$$

(индекс у температуры $T_1 \approx T_2$ опущен).

Функция распределения молекул, рассеянных от стенки, зависит от конкретного характера их взаимодействия со стенкой. Говорят, что имеет место *полная аккомодация*, если молекулы, отраженные от каждого элемента поверхности тела, имеют (независимо от величины и направления их скорости до столкновения) такое же распределение, какое имели бы молекулы в пучке, выходящем из маленького отверстия в сосуде с газом с температурой, равной температуре тела. Другими словами, при полной аккомодации рассеиваемый от стенки газ приходит в тепловое равновесие с нею. Величину коэффициентов в (15,4) имеет смысл сравнивать именно с их значениями при полной аккомодации. В частности, обмен энергией между молекулами газа и твердой стенкой обычно характеризуют коэффициентом аккомодации, определяемым как отношение α/α_0 (где α_0 отвечает полной

аккомодации). В реальных случаях полная аккомодация, вообще говоря, не достигается и коэффициент аккомодации меньше единицы.

В том, что значение α_0 действительно является наибольшим возможным, легко убедиться с помощью следующих соображений. Рассмотрим энтропию S в (15,5) с несколько иной точки зрения: не как полную энтропию тела и газа в целом, а как энтропию тела и лишь той совокупности молекул газа, которые за время Δt падают на поверхность тела. Для этой системы отражение молекул с полной аккомодацией означает переход в состояние полного равновесия, так что ее энтропия принимает максимально возможное значение. Соответственно будет максимально возможным и изменение энтропии, $\Delta S = \dot{S}\Delta t$, сопровождающее этот переход¹⁾. Другими словами, при полной аккомодации квадратичная форма (9,3) должна быть максимальна при любых заданных значениях величин X_a (т. е. τ , V_n , V_t). Отмечая соответствующие значения коэффициентов γ_{ab} индексом нуль, запишем это условие в виде

$$\frac{\alpha_0 - \alpha}{T^2} \tau^2 + \frac{2(\beta_0 - \beta)}{T^2} \tau V_n + \frac{\delta_0 - \delta}{T} V_n^2 + \frac{\theta_0 - \theta}{T} V_t^2 > 0.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\begin{aligned} \alpha_0 > \alpha, \quad \delta_0 > \delta, \quad \theta_0 > \theta, \\ T(\alpha_0 - \alpha)(\delta_0 - \delta) > (\beta_0 - \beta)^2. \end{aligned} \quad (15,10)$$

Рассмотрим вытекание сильно разреженного газа из маленького отверстия (с линейными размерами L). В предельном случае $l/L \gg 1$ этот процесс приобретает весьма простой характер. Молекулы будут покидать сосуд независимо одна от другой, образуя молекулярный пучок, в котором каждая молекула движется с той скоростью, с которой она подошла к отверстию. Число молекул, выходящих в 1 с из отверстия, совпадает с числом столкновений, которые испытали бы за это время молекулы газа с площадью поверхности, равной площади отверстия s . Число столкновений, отнесенное к единице площади стенки, есть $P(2\pi mT)^{-1/2}$, где P — давление газа, m — масса молекулы (см. V, § 39). Таким образом, для количества (массы) вытекающего в 1 с газа находим

$$Q = sP \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}. \quad (15,11)$$

¹⁾ В этих рассуждениях существенно, что тело (играющее роль «теплового резервуара») можно считать находящимся в состоянии равновесия в течение всего процесса, а энтропия идеального газа зависит только от закона распределения его молекул, но не от закона их взаимодействия друг с другом.

Если два сосуда с газом соединены друг с другом отверстием, то в случае $l \ll L$ при механическом равновесии давления P_1 и P_2 газов в обоих сосудах будут одинаковыми, вне зависимости от значений их температур T_1 и T_2 . Если же $l \gg L$, то условием механического равновесия будет являться равенство чисел молекул, переходящих через отверстие из одного сосуда в другой и обратно. Согласно (15,11) это приводит к равенству

$$\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}. \quad (15,12)$$

Таким образом, давления разреженных газов в двух сообщающихся сосудах будут различными, причем они относятся друг к другу как корни из температур (*эффект Кнудсена*).

До сих пор речь шла о явлениях в значительной массе сильно разреженного газа, находящегося самом по себе в равновесии. Остановимся коротко на явлениях другого характера, в которых и сам газ не находится в равновесном состоянии. Такова, например, передача тепла между двумя твердыми пластинками, нагретыми до различных температур и погруженными в разреженный газ, причем расстояние между ними мало по сравнению с длиной свободного пробега. Молекулы, движущиеся в пространстве между пластинками, практически не испытывают столкновений друг с другом и, отражаясь от одной пластинки, свободно движутся до столкновения с другой. При рассеянии от более нагретой пластинки молекулы приобретают от нее некоторую энергию, а затем при столкновении с менее нагретой — отдают ей часть своей энергии. Механизм теплопередачи в этом случае существенно отличается, таким образом, от механизма обычной теплопроводности в неразреженном газе. Его можно характеризовать коэффициентом теплопередачи κ , определенным (по аналогии с обычным коэффициентом теплопроводности) так, чтобы было

$$q = \frac{\kappa(T_2 - T_1)}{L}, \quad (15,13)$$

где q — передаваемое количество тепла (отнесенное к единице площади пластинок в единицу времени), T_1 и T_2 — температуры пластинок, а L — расстояние между ними. Коэффициент κ можно оценить по порядку величины с помощью формулы (7,10). Поскольку вместо столкновений молекул друг с другом мы имеем теперь дело с непосредственными столкновениями с пластинками, то вместо длины свободного пробега l надо подставить расстояние L между пластинками. Таким образом, имеем

$$\kappa \sim \bar{v} N \sim \frac{PL}{\sqrt{mT}}. \quad (15,14)$$

Коэффициент теплопередачи в сильно разреженном газе пропорционален давлению — в противоположность теплопроводности неразреженного газа, не зависящей от давления. Подчеркнем, впрочем, что теперь κ не является характеристикой лишь самого газа: он зависит также и от конкретных условий задачи (от расстояния L между пластинками).

Аналогичное явление представляет собой «вязкость» сильно разреженного газа, проявляющаяся, например, при относительном движении двух находящихся в нем пластинок (причем опять $L \ll l$). Коэффициент вязкости η надо определить теперь так, чтобы было

$$F = \eta V/L, \quad (15,15)$$

где F — сила трения, испытываемая движущейся пластинкой (отношенная к единице ее площади), а V — скорость движения одной пластинки относительно другой. Написав в (8,11) расстояние L вместо длины пробега l , получим

$$\eta \sim \bar{m}NL \sim LP \sqrt{\frac{m}{T}}, \quad (15,16)$$

т. е. вязкость разреженного газа тоже пропорциональна давлению.

Задачи

1. В начальный момент $t=0$ газ занимает полупространство $x < 0$. В пренебрежении столкновениями определить распределение плотности в последующие моменты времени.

Решение. В пренебрежении столкновениями кинетическое уравнение сводится к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0,$$

общее решение которого есть $f = f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$. С учетом поставленного начального условия получим в данном случае

$$f = f_0(v) \text{ при } v_x > x/t, \quad f = 0 \text{ при } v_x < x/t,$$

где f_0 — максвелловское распределение. Плотность газа

$$N(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x/t}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(v) m^3 dv_x dv_y dv_z = \frac{N_0}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{t} \sqrt{\frac{m}{2T}} \right) \right],$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-y^2} dy.$$

а N_0 — начальная плотность. Ввиду пренебрежения столкновениями, написанные формулы фактически справедливы лишь в области $|x| \ll l$.

2. Определить силу, действующую на шарик радиуса R , движущийся со скоростью V в разреженном газе.

Решение. Полная сила сопротивления движению шарика равна

$$F = -\frac{4\pi}{3} v R^2 (\delta + 2\theta).$$

3. Определить скорость, с которой будет двигаться в разреженном газе невесомый плоский диск, стороны которого нагреты до различных температур T_1 и T_2 .

Решение. Скорость V движения диска (в направлении, перпендикулярном к его плоскости) определится из условия равенства нулю суммы сил, действующих на обе его стороны. Диск будет двигаться менее нагретой стороной вперед со скоростью, равной (считаем, что $T_2 > T_1$)

$$V = \frac{\gamma}{2\delta} (T_2 - T_1).$$

4. Вычислить значение α_0 коэффициента α при полной аккомодации.

Решение. Количество энергии, приносимой в единицу времени молекулами, сталкивающимися с единицей площади поверхности тела, есть $\int f_2 v_x \varepsilon d\Gamma$, где f_2 — бoльцмановская функция распределения с температурой T_2 газа (ε — энергия молекулы, а ось x направлена перпендикулярно к поверхности тела). Количество уносимой этими же молекулами энергии получится отсюда (при полной аккомодации) просто заменой T_2 на температуру тела T_1 . Поток тепла

$$q = \int (f_2 - f_1) v_x \varepsilon d\Gamma$$

(интегрирование по v_x — в пределах от 0 до ∞). Энергию молекулы пишем в виде $\varepsilon = \varepsilon_{\text{вн}} + mv^2/2$, где $\varepsilon_{\text{вн}}$ — внутренняя энергия. Вычисление дает для каждого из интегралов значение

$$\int f v v_x d\Gamma = v (\bar{\varepsilon}_{\text{вн}} + 2T) = v \left(\bar{\varepsilon} + \frac{T}{2} \right) = vT \left(c_v + \frac{1}{2} \right),$$

где $\bar{\varepsilon} = c_v T$ — средняя энергия молекулы, а $v = P / \sqrt{2\pi m T}$ — число молекул, сталкивающихся в 1 с с 1 см² поверхности. Тепло q равно разности энергий приходящих и уходящих молекул при одинаковом числе тех и других, т. е. одинаковом v . В результате находим для коэффициента в $q = \alpha (T_2 - T_1)$ значение

$$\alpha_0 = -\frac{P}{\sqrt{2\pi m T}} \left(c_v + \frac{1}{2} \right)$$

(разность $T_2 - T_1$ предполагается малой, так что полагаем $T_1 \approx T_2 \equiv T$).

5. То же для коэффициентов β и γ .

Решение. Нормальная составляющая импульса, приносимого молекулами, сталкивающимися в 1 с с 1 см² поверхности тела, равна половине давления газа. Выражая давление через v , имеем

$$\frac{P}{2} = v \sqrt{\frac{\pi m T}{2}}.$$

Взяв разность значений этой величины при температурах T_1 и T_2 и одинаковых v , получим дополнительную силу F_n , обусловленную разностью температур. Считая $T_2 - T_1$ малой, найдем

$$\gamma_0 = P/4T.$$

Для коэффициента β имеем согласно (15,6) $\beta_0 = P/4$.

6. То же для коэффициентов δ и θ .

Решение. Выбираем систему координат, в которой тело покоится, а газ движется со скоростью V ; ось x направлена по нормали к поверхности, а плоскость xy выбрана так, чтобы V лежало в ней. Функция распределения в этой системе есть

$$f = \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{e_{\text{вн}}}{T} - \frac{m}{2T} [(v_x - V_x)^2 + (v_y - V_y)^2 + v_z^2] \right\}.$$

Что касается отраженных молекул, то при полной аккомодации они имеют функцию распределения с $V=0$; τ считаем равным нулю.

При вычислении касательной силы F_y полагаем $V_x=0$. Приносимая падающими на поверхность тела молекулами полная y -компонента импульса есть

$$\int m v_y v_x f d\Gamma = m V_y \int v_x f d\Gamma = m V_y v$$

(по v_x интегрирование производится везде в пределах от 0 до ∞). Уносимая же ими y -компонента импульса исчезает. Таким образом, $F_y = m v V_y$, так что

$$\theta_0 = v m = P \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}.$$

Пусть теперь $V_x \neq 0$, $V_y = 0$. С точностью до членов первого порядка по V_x имеем

$$f = f_0 + V_x \frac{m v_x}{T} f_0,$$

где f_0 — функция распределения с $V=0$. Число молекул, сталкивающихся в 1 с 1 см² поверхности, есть

$$v = \int f v_x d\Gamma = \frac{P}{\sqrt{2\pi m T}} + \frac{P V_x}{2T}.$$

Приносимая этими молекулами x -компонента импульса есть

$$\int m v_x^2 f d\Gamma = \frac{P}{2} + P V_x \sqrt{\frac{2m}{\pi T}}.$$

Отраженные от стенки молекулы имеют функцию распределения с $V_x=0$, нормированную таким образом, чтобы интеграл $\int f v_x d\Gamma$ был равен числу v падающих молекул, определенному выше. Уносимая этими молекулами x -компонента импульса равна

$$-\frac{v}{2} \sqrt{2\pi m T} = -\frac{P}{2} - \frac{P V_x}{2} \sqrt{\frac{\pi m}{2T}}.$$

Дополнительная к давлению нормальная сила есть $F_x = \delta_0 V_x$, где

$$\delta_0 = P \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\theta_0}{2} (4 + \pi).$$

7. В предположении полной аккомодации определить температуру пластинки, движущейся со скоростью V в разреженном газе параллельно самой себе.

Решение. Поступая как в задаче 4, имеем для приносимой энергии:

$$v \left(c_v T_2 + \frac{T_2}{2} + \frac{mV^2}{2} \right),$$

а для уносимой:

$$v T_1 \left(c_v + \frac{1}{2} \right).$$

Приравнявая эти потоки, находим

$$T_1 - T_2 = \frac{mV^2}{2c_v + 1}.$$

8. Определить количество газа, протекающего в единицу времени через поперечное сечение цилиндрической трубы (радиуса R) под влиянием градиентов давления и температуры. Газ настолько разрежен, что длина свободного пробега $l \gg R^1$. При столкновениях молекул с ее стенками имеет место полная аккомодация.

Решение. Распределение молекул по скоростям при отражении их от стенки при полной аккомодации имеет вид $v_x f d^3p$, где f — максвелловская функция распределения, а ось x перпендикулярна к поверхности. Обозначая посредством ϑ угол между скоростью молекулы и осью x , найдем, что распределение отраженных молекул по направлениям их движения (независимо от абсолютной величины скорости) имеет вид

$$\frac{v}{\pi} \cos \vartheta d\vartheta$$

(эта функция нормирована так, что ее интеграл по всем телесным углам по одну сторону плоскости равен v).

Выбираем ось z по оси трубки, а начало координат — в рассматриваемом ее сечении. Через это сечение проходят молекулы, испытавшие последнее отражение от различных участков поверхности трубы. Из числа молекул, рассеянных от некоторого элемента df поверхности стенки на расстоянии z , пройдут через заданное сечение те, которые отражены по направлениям, лежащим внутри телесного угла, под которым видно это сечение из рассматриваемой точки на поверхности трубы, т. е. $df \cdot v \int \cos \vartheta d\vartheta / \pi$ молекул (интегрирование производится по указанному интервалу углов).

Этот интеграл, очевидно, одинаков для всех точек, лежащих на одинаковом расстоянии z от заданного сечения. Поэтому полное число молекул, проходящих (в 1 с) через это сечение, получится заменой df на кольцевой элемент поверхности $2\pi R dz$ и интегрированием по всей длине трубы; умножая еще на массу m молекулы, получим расход массы газа через сечение трубы:

$$Q = 2mR \int v \left(\int \cos \vartheta d\vartheta \right) dz.$$

Число v , будучи функцией давления и температуры, меняется вдоль длины трубы. Если градиенты давления и температуры вдоль длины не слишком велики, то можно написать

$$v(z) = v(0) + z \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=0}.$$

¹⁾ О потоке газа в таких условиях говорят как о *свободномолекулярном*.

Интеграл с $v(0)$ обращается, очевидно, в нуль, так что

$$Q = 2\pi R \frac{dv}{dz} \Big|_{z=0} \iint z \cos \vartheta \, d\omega \, dz.$$

Для проведения интегрирования вводим в плоскости рассматриваемого сечения трубы координаты r и φ , где r — расстояние переменной точки A' от некоторой заданной точки O на окружности сечения, а φ — угол между отрезком OA' и радиусом сечения (рис. 3). Молекула, отраженная от стенки в точке A (лежащей на одной образующей с точкой O) и проходящая затем через точку A' , должна иметь скорость под углом ϑ с нормалью к поверхности трубы в точке A , для которого

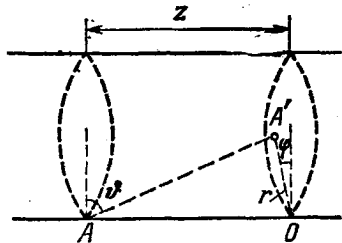


Рис. 3.

$$\cos \vartheta = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Элемент телесного угла можно написать в виде

$$d\omega = \frac{r \, dr \, d\varphi}{r^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

(площадь $r \, dr \, d\varphi$ проектируем на плоскость, перпендикулярную к прямой AA' , и делим на квадрат длины этой прямой). Интегрирование производится по области

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq r \leq 2R \cos \varphi, \quad -\infty \leq z \leq \infty,$$

и дает

$$Q = \frac{8\pi R^3}{3} \frac{dv}{dz}.$$

Наконец, подставив $v = P/\sqrt{2\pi m T}$, получим окончательно

$$Q = \frac{4\pi R^3}{3L} \sqrt{2\pi m} \left(\frac{P_2}{\sqrt{T_2}} - \frac{P_1}{\sqrt{T_1}} \right),$$

где в скобках стоит разность значений величины P/\sqrt{T} на длине L трубы (замена производной разностью допустима ввиду постоянства Q , а потому и этой производной, вдоль длины трубы).

9. В предположении полной аккомодации найти силу трения между двумя твердыми плоскостями (расстояние между которыми $L \ll l$), движущимися относительно друг друга со скоростью V ; плоскости имеют температуры T_1 и T_2 .

Решение. Пусть плоскость 1 (с температурой T_1) покоится, а плоскость 2 движется со скоростью V вдоль оси x ; ось y направлена от первой плоскости ко второй. Молекулы со скоростями $v_y > 0$ и $v_y < 0$ отражены соответственно от плоскостей 1 и 2: при полной аккомодации их функции распределения

$$f = \frac{2N_1}{(2\pi m T_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_1}\right) \quad \text{при } v_y > 0,$$

$$f = \frac{2N_2}{(2\pi m T_2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2}{2T_2}\right) \quad \text{при } v_y < 0,$$

где N_1 и N_2 — соответствующие плотности числа частиц; полная плотность $N = N_1 + N_2$. Условие отсутствия суммарного потока в направлении оси y дает

$$N_1 \sqrt{T_1} = N_2 \sqrt{T_2}.$$

На каждую из плоскостей действует давление $P = N_1 T_1 + N_2 T_2$ и сила трения (отнесенная к единице площади)

$$F_2 = -F_1 = mV \int_{v_y > 0} v_y f d^3 p = VN_2 \sqrt{\frac{2mT_2}{\pi}} = VN \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \frac{(T_1 T_2)^{1/2}}{T_1^{1/2} + T_2^{1/2}}.$$

Если $T_1 = T_2 = T$, то

$$F_2 = -F_1 = VP \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}$$

в соответствии с (15,15—16).

10. В предположении полной аккомодации определить коэффициент теплопередачи κ между двумя пластинками с близкими температурами T_1 и T_2 .

Решение. При полной аккомодации падающие на пластинку 1 молекулы имеют равновесное распределение с температурой T_2 . Поэтому поток энергии от пластинки 1 к пластинке 2: $q = \alpha_0 (T_2 - T_1)$.

Взяв α_0 из задачи 4 и определив κ согласно (15,13), получим

$$\kappa = \alpha_0 L = \frac{PL}{\sqrt{2\pi m T}} \left(c_v + \frac{1}{2} \right)$$

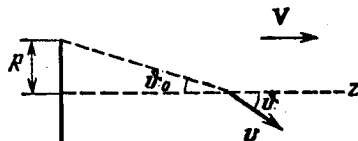


Рис. 4.

в соответствии с оценкой (15,14).

11. Определить плотность газа на оси позади кругового диска радиуса $R \ll l$, движущегося в газе со скоростью $-V$, большой по сравнению со средней тепловой скоростью атомов v_T .

Решение. При $V \gg v_T$ частицы, отраженные от задней поверхности диска, несущественны (за исключением узкой области у этой поверхности — см. ниже). Все дело сводится к «затенению» диском набегающего потока. В системе координат, в которой диск покоится (а газ движется со скоростью V), в отсутствие самого диска функция распределения была бы равна

$$f_0(v) = \frac{N_0}{(2\pi m T)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{m(v - V)^2}{2T} \right\}.$$

В присутствии диска плотность числа частиц газа на оси z (рис. 4) будет

$$N(z) = 2\pi \int_0^\infty \int_{\theta_0}^\pi f_0(v) \rho^2 \sin \theta d\theta dp,$$

где θ — угол между v и осью z , а θ_0 — угол, под которым радиус диска виден из точки наблюдения на оси z (т.е. $\theta_0 = R/z$; частицы с $\theta < \theta_0$ «затенены»). Интегрирование с учетом условия $V \gg v_T$ дает

$$\begin{aligned} N(z) &= \frac{N_0}{V} \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{m}{2T} [(v - V \cos \theta_0)^2 + V^2 \sin^2 \theta_0] \right\} v dv \approx \\ &\approx N_0 \cos \theta_0 \exp \left\{ -\frac{mV^2}{2T} \sin^2 \theta_0 \right\} = N_0 \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \exp \left\{ -\frac{mV^2}{2T} \frac{R^2}{R^2 + z^2} \right\}, \end{aligned}$$

где N_0 — плотность газа вдали от диска. Интегрирование по dp выполнено в предположении $\cos \theta_0 \gg v_T/V$ (можно показать, что это же неравенство является также и условием допустимости пренебрежения отраженными от задней стенки частицами).