Более того, оператором $\hat{R}_{123}$ учитываются также и случаи, когда одно (или более) из трех столкновений является «воображаемым», т. е. возникающим, лишь если не учитывать влияния на траекторию частиц какого-либо из реальных столкновений. Пример такого процесса изображен на рис. 5, *в*: столкновение *1—3* имело бы место лишь в отсутствие искажения траектории частицы *3* ее столкновением с частицей *2*[1]) (для этого процесса $\hat{S}_{123}=\hat{S}_{12}\hat{S}_{23}$, но $\hat{S}_{13}\neq 1$, так что $\hat{R}_{123}$ сводится к $-\hat{S}_{12}\hat{S}_{13}+\hat{S}_{12}$).

Подобно тому, как преобразовывался в § 16 интеграл $\mathrm{St}_0^{(2)}$, может быть выполнено одно из шести интегрирований по координатам в интеграле тройных столкновений; при этом потенциал взаимодействия U_{12} в явном виде исчезает из формул[2]).

§ 18. Вириальное разложение кинетических коэффициентов

В §§ 7, 8 было уже указано, что независимость коэффициентов теплопроводности и вязкости от плотности (или давления) газа является следствием учета одних только парных столкновений молекул. Именно для таких столкновений их частота (т.е. число столкновений, испытываемых в 1 с заданной молекулой) пропорциональна плотности N, длина пробега $l \sim 1/N$, а поскольку η и $\varkappa$ пропорциональны Nl, они оказываются независящими от N. Получающиеся таким образом значения (обозначим их η_0 и $\varkappa_0$) являются, конечно, лишь первыми членами разложения этих величин по степеням плотности (эти разложения называют *вириальными*). Уже в следующем приближении появляется зависимость от плотности вида

$$\varkappa=\varkappa_0(1+\alpha Nd^3), \quad \eta=\eta_0(1+\beta Nd^3), \tag{18,1}$$

где d—параметр порядка величины молекулярных размеров, а α, β—безразмерные постоянные. Эти первые поправки имеют двоякое происхождение, отраженное в поправочных членах $\mathrm{St}^{(3)}$ и $\mathrm{St}_1^{(2)}$ в кинетическом уравнении. Тройные столкновения (частота которых пропорциональна N^2) приводят к уменьшению длины пробега. Нелокальность же парных столкновений приводит к возможности передачи импульса и энергии через некоторую поверхность без ее фактического пересечения сталкивающимися частицами: частицы сближаются на расстояние $\sim d$ и затем расходятся, оставаясь по разные стороны от поверхности; этот эффект приводит к увеличению потоков импульса и энергии.

---

[1]) Напомним, что по смыслу действия S-операторов надо следить за траекториями частиц по направлению назад во времени!

[2]) Проведение этого преобразования—см. *Green M. S.*—Phys. Rev. 1964, v. 136A, p. 905.

Решение задачи о теплопроводности или вязкости с уточненным кинетическим уравнением (17,12) должно строиться по той же схеме, которая была описана в §§ 6—8. Ищем функцию распределения в виде $f = f_0(1+\chi/T)$, где f_0—локально-равновесная функция, а $\chi/T \sim l/L$—малая добавка. Интеграл тройных столкновений $\mathrm{St}^{(3)}$, как и $\mathrm{St}_0^{(2)}$, обращается в нуль функцией f_0. Поэтому в нем надо удержать член с χ, в результате чего интеграл $\mathrm{St}^{(3)}$ оказывается по отношению к больцмановскому интегралу $\mathrm{St}^{(2)}$ поправкой относительного порядка $\sim(d/\bar{r})^3$. В интеграле же $\mathrm{St}_1^{(2)}$, содержащем пространственные производные функции распределения, достаточно положить $f=f_0$; в этом смысле член $\mathrm{St}_1^{(2)}$ должен быть отнесен к левой стороне уравнения, в которой он дает поправку того же относительного порядка $\sim(d/\bar{r})^3$. Таким образом, оба дополнительных члена в кинетическом уравнении, $\mathrm{St}^{(3)}$ и $\mathrm{St}_1^{(2)}$, дают вклады одинакового порядка [1]).

Приведем здесь, для справок, результаты решения уточненного кинетического уравнения для теплопроводности и вязкости газа в модели твердых шаров (диаметра d):

$$\varkappa = \varkappa_0(1+1{,}2Nd^3), \quad \eta = \eta_0(1+0{,}35Nd^3), \tag{18,2}$$

где $\varkappa_0$ и η_0—значения, полученные в задаче 3 § 10 (*J. V. Sengers*, 1966) [2]).

Вводя дальнейшие поправки в кинетическое уравнение (связанное с четверными и т. д. столкновениями), можно было бы в принципе определить и следующие члены вириального разложения кинетических коэффициентов. Существенно, однако, что эти члены уже не будут просто целыми степенями N; функции $\varkappa(N)$ и $\eta(N)$ оказываются неаналитическими в точке $N=0$. Для выяснения происхождения этой неаналитичности проанализируем вопрос о сходимости интегралов, фигурирующих в излагаемой теории (*E. C. Cohen, J. R. Dorfman, J. Weinstock*, 1963).

Рассмотрим интеграл в (17,10), определяющий вклад тройных столкновений в двухчастичную функцию распределения. Характер сходимости интеграла оказывается различным для различных типов процессов столкновений, учитываемых оператором $\hat{R}_{123}$. Рассмотрим для примера процесс типа рис. 5, *б*.

Интегрирование производится по фазовому объему $d\tau_3$ при заданных фазовых точках τ_1 и τ_2. В качестве переменной, по

---

[1]) Эти соображения разъясняют недоумение, которое могло бы возникнуть в связи с тем, что интеграл $\mathrm{St}_1^{(2)}$ содержит производные $\partial f/\partial \mathbf{r} \sim f/L$, которых нет в интеграле $\mathrm{St}^{(3)}$, и потому, казалось бы, эти два члена представляют собой поправки различного порядка величины.

[2]) Изложение хода соответствующих, весьма трудоемких вычислений можно найти в статье *Зенгерса* в книге: Lectures in theoretical physics, Vol. IX C, Kinetic Theory (edited by W. Brittin); Gordon a. Breech, N.Y., 1967.

которой интегрирование производится последним, оставим расстояние r_3 частицы 3 (в момент времени t) от точки, где произошло столкновение 2—3. Перед этим последним интегрированием подынтегральное выражение будет содержать следующие множители: 1) элемент объема по переменной r_3: $r_3^2dr_3$; 2) если следить за движением частицы 3 назад по времени, то будет ясно, что направление ее импульса $\mathbf{p}_3$ должно лежать в определенном элементе телесных углов для того, чтобы могло произойти столкновение 3—2—угол, под которым область соударения видна с расстояния r_3; отсюда возникает множитель d^2/r_3^2; 3) еще один такой множитель возникает в результате дальнейшего ограничения возможных направлений импульса $\mathbf{p}_3$, требуемого условием, что «отскочившая» частица 2 должна попасть в сферу соударения с частицей 1. Таким образом, получается интеграл вида $\int dr_3/r_3^2$, который должен быть взят от расстояния $r_3 \sim d$ до ∞; мы видим, что этот интеграл сходится. Аналогичным образом можно показать, что для процессов столкновения других типов сходимость интеграла оказывается даже более быстрой.

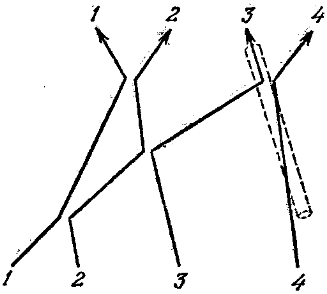

Рис. 6.

Вклад четверных столкновений выразился бы в (17,10) интегралом аналогичного вида, взятым по фазовому пространству частиц 3 и 4 (снова при заданных τ_1 и τ_2).

Рассмотрим четверное соударение изображенного на рис. 6 типа. Оставим в качестве последней переменной интегрирования расстояние r_4 от частицы 4 (в момент t) до точки соударения 4—3. Отличие от предыдущей оценки связано с тем, что фазовая точка τ_3 (в момент t) не задана—в отличие от точки τ_2 в интеграле, отвечающем рис. 5, *б*. Поэтому оказывается незакрепленным также и место столкновения 4—3, которое может находиться где-либо в цилиндрической области с диаметром $\sim d$ и осью вдоль $\mathbf{p}_3$ (пунктир на рис. 6). Соответственно телесный угол, под которым видна эта область с расстояния r_4, будет $\sim d/r_4$ (вместо d^2/r_3^2 в предыдущем случае). В результате интеграл окажется вида $\int dr_4/r_4$, т. е. логарифмически расходится на верхнем пределе. Обрезая интеграл на некотором расстоянии Λ, получим вклад в функцию $f^{(2)}$, содержащий большой логарифм $\ln(\Lambda/d)$. Этот логарифм войдет соответственно и в поправку к кинетическим коэффициентам, которая окажется пропорциональной не $(Nd^3)^2$, а $(Nd^3)^2\ln(\Lambda/d)$.

Появление расходящихся членов означает, что четверные столкновения нельзя рассматривать отдельно от столкновений всех более высоких порядков (пятерных и т. д.). Действительно, расходимость показывает, что существенны большие r_4. Но уже при $r_4 \sim l$ частица *4* может столкнуться с какой-либо частицей *5*, и т. д. Отсюда становится ясным путь устранения расходимости: в выражении для функции $f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$ надо учесть члены со столкновениями всех порядков, оставив в каждом порядке наиболее быстро расходящиеся интегралы. Такое суммирование может быть произведено и приводит к результату, который можно было ожидать: произвольный большой параметр Λ под знаком логарифма заменяется на величину порядка длины пробега $l \sim 1/Nd^2$ [1]).

Таким образом, разложение кинетических коэффициентов имеет вид

$$\varkappa = \varkappa_0 \left[1 + \alpha_1 Nd^3 + \alpha_2 (Nd^3)^2 \ln \frac{1}{Nd^3} + \ldots\right] \tag{18,3}$$

(и аналогично для η).

§ 19. Флуктуации функции распределения в равновесном газе

Определяемая кинетическим уравнением функция распределения (которую мы будем обозначать в этом и следующем параграфах как $\bar{f}$) дает средние числа молекул, находящихся в элементах фазового объема $d^3x\, d\Gamma$; для статистически равновесного газа функция $\bar{f}(\Gamma)$ есть независящая от времени и (если нет внешнего поля) от координат $\mathbf{r}$ больцмановская функция распределения f_0 (6,7). Естественно возникает вопрос о флуктуациях, испытываемых точной, микроскопической функцией распределения $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ в ходе ее изменения со временем при движении частиц газа по их точным уравнениям движения [2]).

Введем *корреляционную функцию флуктуаций* (или, как говорят короче, *коррелятор*)

$$\langle \delta f(t_1, \mathbf{r}_1, \Gamma_1)\, \delta f(t_2, \mathbf{r}_2, \Gamma_2)\rangle, \tag{19,1}$$

где $\delta f = f - \bar{f}$. В равновесном газе эта функция зависит только от разности времен $t = t_1 - t_2$; усреднение производится по одному из моментов t_1, t_2 при заданном значении их разности. Ввиду однородности газа, в виде разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ входят в коррелятор также и координаты точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Поэтому можно, условно положив t_2 и $\mathbf{r}_2$ равными нулю, представить коррелятор в виде

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1)\, \delta f(0, 0, \Gamma_2)\rangle. \tag{19,2}$$

---

[1]) См. *Kawasaki K., Oppenheim I.*—Phys. Rev. 1965, v. 139A, p. 1763.
[2]) Этот вопрос впервые рассматривался *Б. Б. Кадомцевым* (1957).