Появление расходящихся членов означает, что четверные столкновения нельзя рассматривать отдельно от столкновений всех более высоких порядков (пятерных и т. д.). Действительно, расходимость показывает, что существенны большие $r_4$. Но уже при $r_4 \sim l$ частица *4* может столкнуться с какой-либо частицей *5*, и т. д. Отсюда становится ясным путь устранения расходимости: в выражении для функции $f^{(2)}(t, \tau_1, \tau_2)$ надо учесть члены со столкновениями всех порядков, оставив в каждом порядке наиболее быстро расходящиеся интегралы. Такое суммирование может быть произведено и приводит к результату, который можно было ожидать: произвольный большой параметр $\Lambda$ под знаком логарифма заменяется на величину порядка длины пробега $l \sim 1/Nd^2$ [1]).

Таким образом, разложение кинетических коэффициентов имеет вид

$$\varkappa = \varkappa_0 \left[1 + \alpha_1 Nd^3 + \alpha_2 (Nd^3)^2 \ln \frac{1}{Nd^3} + \ldots\right] \tag{18,3}$$

(и аналогично для $\eta$).

## § 19. Флуктуации функции распределения в равновесном газе

Определяемая кинетическим уравнением функция распределения (которую мы будем обозначать в этом и следующем параграфах как $\bar{f}$) дает средние числа молекул, находящихся в элементах фазового объема $d^3x\,d\Gamma$; для статистически равновесного газа функция $\bar{f}(\Gamma)$ есть независящая от времени и (если нет внешнего поля) от координат $\mathbf{r}$ больцмановская функция распределения $f_0$ (6,7). Естественно возникает вопрос о флуктуациях, испытываемых точной, микроскопической функцией распределения $f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ в ходе ее изменения со временем при движении частиц газа по их точным уравнениям движения [2]).

Введем *корреляционную функцию флуктуаций* (или, как говорят короче, *коррелятор*)

$$\langle \delta f(t_1, \mathbf{r}_1, \Gamma_1)\, \delta f(t_2, \mathbf{r}_2, \Gamma_2)\rangle, \tag{19,1}$$

где $\delta f = f - \bar{f}$. В равновесном газе эта функция зависит только от разности времен $t = t_1 - t_2$; усреднение производится по одному из моментов $t_1$, $t_2$ при заданном значении их разности. Ввиду однородности газа, в виде разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ входят в коррелятор также и координаты точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Поэтому можно, условно положив $t_2$ и $\mathbf{r}_2$ равными нулю, представить коррелятор в виде

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1)\, \delta f(0, 0, \Gamma_2)\rangle. \tag{19,2}$$

[1]) См. *Kawasaki K., Oppenheim I.*—Phys. Rev. 1965, v. 139A, p. 1763.
[2]) Этот вопрос впервые рассматривался *Б. Б. Кадомцевым* (1957).

Ввиду изотропии газа, зависимость этой функции от $\mathbf{r}$ фактически сводится к зависимости от абсолютной величины $r$.

Если функция (19,2) известна, то ее интегрированием можно найти также и коррелятор плотности числа частиц:

$$\langle\delta N(t,\ \mathbf{r})\,\delta N(0,\ 0)\rangle=\int\langle\delta f(t,\ \mathbf{r},\ \Gamma_1)\,\delta f(0,\ 0,\ \Gamma_2)\rangle\, d\Gamma_1\, d\Gamma_2. \qquad (19,3)$$

Для расстояний $r$, больших по сравнению с длиной пробега $l$, коррелятор плотности можно вычислить с помощью гидродинамической теории флуктуаций (см. IX, § 88). На расстояниях же $\lesssim l$ требуется кинетическое рассмотрение.

Непосредственно из определения (19,1) очевидно, что

$$\langle\delta f(t,\ \mathbf{r},\ \Gamma_1)\ \delta f(0,\ 0,\ \Gamma_2)\rangle=\langle\delta f(-t,\ -\mathbf{r},\ \Gamma_2)\,\delta f(0,\ 0,\ \Gamma_1)\rangle. \qquad (19,4)$$

Корреляционная функция обладает также и более глубокой симметрией, выражающей симметрию равновесного состояния системы по отношению к обращению времени. Обращение времени заменяет более поздний момент времени $t$ на более ранний $-t$, а также меняет значения величин $\Gamma$ на обращенные $\Gamma^T$. Указанная симметрия выражается поэтому равенством

$$\langle\delta f(t,\ \mathbf{r},\ \Gamma_1)\,\delta f(0,\ 0,\ \Gamma_2)\rangle=\langle\delta f(-t,\ \mathbf{r},\ \Gamma_1^T)\,\delta f(0,\ 0,\ \Gamma_2^T)\rangle. \qquad (19,5)$$

При $t=0$ функция (19,2) связывает флуктуации в различных точках фазового пространства в один и тот же момент времени. Но корреляции между одновременными флуктуациями распространяются лишь на расстоянии порядка величины радиуса действия молекулярных сил. Между тем в рассматриваемой теории такие расстояния рассматриваются как равные нулю и, таким образом, одновременный коррелятор обращается в нуль. Подчеркнем, что это обстоятельство связано именно с равновесностью состояния, относительно которого рассматриваются флуктуации. В неравновесном случае, как мы увидим в следующем параграфе, одновременные флуктуации тоже коррелированы.

В отсутствие корреляции на отличных от нуля расстояниях одновременный коррелятор сводится к $\delta$-функциям, причем коэффициент при этих функциях определяет средний квадрат флуктуации в одной точке фазового пространства (ср. IX, § 88). В идеальном равновесном газе средний квадрат флуктуации функции распределения совпадает со средним значением самой этой функции (см. V, § 113) и, таким образом,

$$\langle\delta f(0,\ \mathbf{r},\ \Gamma_1)\,\delta f(0,\ 0,\ \Gamma_2)\rangle=\bar f(\Gamma_1)\,\delta(\mathbf{r})\,\delta(\Gamma_1-\Gamma_2). \qquad (19,6)$$

Неодновременная же корреляция между флуктуациями в различных точках существует уже и в теории, пренебрегающей молекулярными размерами. Необходимость возникновения этой корреляции очевидна уже из того, что частицы, участвующие в определенный момент во флуктуации в некотором месте фазового пространства, в следующие моменты будут уже находиться в других местах.

Задача о вычислении коррелятора при $t \neq 0$ не может быть решена в общем виде, но может быть сведена к решению определенных уравнений. Для этого надо вспомнить следующее положение общей теории квазистационарных флуктуаций (см. V, §§ 118, 119).

Пусть $x_a(t)$—флуктуирующие величины (с равными нулю средними значениями). Предполагается, что если система находится в неравновесном состоянии со значениями $x_a$, выходящими за пределы их средних флуктуаций (но все же малыми), то процесс релаксации системы к равновесию описывается линейными «уравнениями движения» вида

$$\dot{x}_a = -\sum_b \lambda_{ab} x_b \tag{19,7}$$

с постоянными коэффициентами $\lambda_{ab}$. Тогда можно утверждать, что корреляторы величин $\hat{x}_a$ удовлетворяют таким же уравнениям

$$\frac{d}{dt} \langle x_a(t) x_c(0) \rangle = -\sum_b \lambda_{ab} \langle x_b(t) x_c(0) \rangle, \qquad t > 0 \tag{19,8}$$

(индекс $c$ в этой системе уравнений свободный). Решив эти уравнения при $t > 0$, найдем затем значения функций при $t < 0$ согласно свойству симметрии

$$\langle x_a(t) x_b(0) \rangle = \langle x_b(-t) x_a(0) \rangle, \tag{19,9}$$

являющемуся следствием определения корреляторов.

В данном случае роль уравнений движения (19,7) играет линеаризованное уравнение Больцмана для малой добавки $\delta f$ к равновесной функции распределения $\bar{f}$. Таким образом, коррелятор функции распределения должен удовлетворять интегро-дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \hat{I}_1\right) \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1) \delta f(0, 0, \Gamma_2) \rangle = 0 \text{ при } t > 0, \tag{19,10}$$

где $\hat{I}_1$—линейный интегральный оператор, действующий на переменные $\Gamma_1$ в следующей за ним функции согласно определению:

$$\hat{I}_1 g(\Gamma_1) = \int w(\Gamma_1, \Gamma; \Gamma_1', \Gamma') [\bar{f}_1' g_1' + \bar{f}' g' - \bar{f}_1 g_1 - \bar{f} g] \, d\Gamma \, d\Gamma_1' d\Gamma'. \tag{19,11}$$

Переменные же $\Gamma_2$ в уравнении (19,10)—свободные. Начальным условием для уравнения служит значение (19,6) коррелятора при $t=0$, а коррелятор при $t<0$ определяется затем равенством (19,4) (условие же (19,5) удовлетворяется в результате автоматически). Формулы (19,10—11), (19,4) и дают ту совокупность уравнений, которые в принципе достаточны для полного определения коррелятора.

Обычно представляет интерес не сам коррелятор, а его фурье-образ по координатам и времени, который мы обозначим символом $(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}}$, где индексы 1 и 2 обозначают аргументы $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$:

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1)\, \delta f(0, 0, \Gamma_2)\rangle e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\, d^3x \quad (19{,}12)$$

(*спектральная функция флуктуаций*, или *спектральный коррелятор*). Если флуктуирующую функцию разложить в интеграл Фурье по времени и координатам, то среднее значение произведений ее фурье-компонент связано со спектральным коррелятором формулой

$$\langle \delta f_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma_1)\, \delta f_{\omega'\mathbf{k}'}(\Gamma_2)\rangle = (2\pi)^4\, \delta(\omega+\omega')\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\, (\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} \quad (19{,}13)$$

(ср. V, § 122).

Легко написать уравнение, которое позволяет в принципе определить спектральную функцию флуктуаций без предварительного вычисления пространственно-временного коррелятора.

Разбив область интегрирования по $t$ в (19,12) на две части (от $-\infty$ до 0 и от 0 до $\infty$) и используя (19,4), получим

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} = (\delta f_1 \delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} + (\delta f_2 \delta f_1)^{(+)}_{-\omega-\mathbf{k}}, \quad (19{,}14)$$

где

$$(\delta f_1 \delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \int_{0}^{\infty} dt \int \langle \delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1)\, \delta f(0, 0, \Gamma_2)\rangle e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\, d^3x. \quad (19{,}15)$$

Совершим над уравнением (19,10) одностороннее преобразование Фурье (19,15). При этом члены с производными по $t$ и по $\mathbf{r}$ интегрируем по частям, учитывая, что коррелятор должен стремиться к нулю при $\mathbf{r}\to\infty$ и при $t\to\infty$, а при $t=0$ должен даваться формулой (19,6). В результате получим искомое уравнение в виде

$$[i(\mathbf{kv}_1-\omega)-\hat{I}_1]\,(\delta f_1 \delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \bar{f}(\Gamma_1)\, \delta(\Gamma_1-\Gamma_2). \quad (19{,}16)$$

Если интересоваться не флуктуациями самой функции распределения, а лишь флуктуациями плотности газа, целесообразно проинтегрировать уравнение (19,16) по $d\Gamma_2$:

$$[i(\mathbf{kv}-\omega)-\hat{I}]\,(\delta f(\Gamma)\, \delta N)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}} = \bar{f}(\Gamma). \quad (19{,}17)$$

Искомая же спектральная функция $(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}}$ получается из решения этого уравнения однократным (а не двукратным, как в (19,3)) интегрированием.

Другой способ нахождения $(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}}$ основан на связи коррелятора плотности с обобщенной восприимчивостью по отношению к слабому внешнему полю вида

$$U(t, \mathbf{r}) = U_{\omega\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \tag{19,18}$$

(см. IX, § 86)[1]). Если под влиянием этого поля возникает изменение плотности

$$\delta N_{\omega\mathbf{k}} = \alpha(\omega, \mathbf{k}) U_{\omega\mathbf{k}}, \tag{19,19}$$

то (согласно IX, (86,20)) в классическом пределе спектральный коррелятор плотности

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2T}{\omega} \operatorname{Im} \alpha(\omega, \mathbf{k}). \tag{19,20}$$

Пусть $\delta f(t, \mathbf{r})$ — изменение функции распределения под влиянием этого же поля. Оно удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial\, \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial\, \delta f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{v}} = \hat{I} \delta f.$$

Фурье-компоненты функции $\delta f(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ запишем в виде

$$f_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) = \chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) U_{\omega\mathbf{k}},$$

выделив в них внешнее поле. Тогда для $\chi_{\omega\mathbf{k}}$ имеем уравнение

$$\left[i(\mathbf{kv} - \omega) - \hat{I}\right] \chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma) = i\mathbf{k} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{v}}. \tag{19,21}$$

По решению этого уравнения искомый спектральный коррелятор определяется однократным интегрированием:

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2T}{\omega} \operatorname{Im} \int \chi_{\omega\mathbf{k}}(\Gamma)\, d\Gamma. \tag{19,22}$$

### Задачи

1. Определить коррелятор плотности в равновесном одноатомном газе в пренебрежении столкновениями.

Решение. Для одноатомного газа величинами $\Gamma$ являются три компоненты импульса $\mathbf{p}$. Решение уравнения (19,10) при $\hat{I}_1 = 0$:

$$\langle \delta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}_1)\, \delta f(0, 0, \mathbf{p}_2) \rangle = \bar{f}(\mathbf{p}_1)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_1 t)\, \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2).$$

Его фурье-компонента:

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} = 2\pi \bar{f}(\mathbf{p}_1)\, \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\, \delta(\omega - \mathbf{kv}_1).$$

---

[1]) Подчеркнем, что эта связь существует только в равновесном случае.

Интегрирование этих выражений (с максвелловской функцией $\bar{f}$) дает для коррелятора плотности:

$$\langle\delta N(t,\ \mathbf{r})\,\delta N(0,\ 0)\rangle=\bar{N}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\frac{1}{t^3}\exp\left(-\frac{mr^2}{2Tt^2}\right), \qquad (1)$$

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}}=\frac{\bar{N}}{k}\left(\frac{2\pi m}{T}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m\omega^2}{2Tk^2}\right). \qquad (2)$$

2. То же для интеграла столкновений вида $\hat{I}_1 g=-g/\tau$ с постоянным временем $\tau$.

Решение. Уравнение (19,16) сводится к алгебраическому. Определив из него $(\delta f_1\delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$, найдем затем по (19,14):

$$(\delta f_1\delta f_2)_{\omega\mathbf{k}}=\frac{2\tau\bar{f}\,(\mathbf{p}_1)}{1+\tau^2\,(\mathbf{k}\mathbf{v}_1-\omega)^2}\,\delta\,(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2). \qquad (3)$$

Отметим, что наличие даже малого числа столкновений меняет асимптотическое поведение спектрального коррелятора плотности при больших частотах, $\omega\gg k\bar{v}$, т. е. для флуктуаций с фазовой скоростью, много большей тепловой скорости молекул. Действительно, в этом пределе

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}}=2\bar{N}/\tau\omega^2, \qquad (4)$$

т. е. коррелятор убывает с увеличением частоты по степенному закону вместо экспоненциального в (2).

## § 20. Флуктуации функции распределения в неравновесном газе

Пусть газ находится в стационарном, но неравновесном состоянии с некоторой функцией распределения $\bar{f}(\mathbf{r},\ \Gamma)$, удовлетворяющей кинетическому уравнению

$$\mathbf{v}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\mathbf{r}}=\mathrm{St}\,\bar{f}. \qquad (20,1)$$

Функция $\bar{f}$ может сильно отличаться от равновесной функции распределения $f_0$, так что интеграл столкновений $\mathrm{St}\,\bar{f}$ не предполагается линеаризованным по разности $\bar{f}-f_0$. Стационарное неравновесное состояние должно поддерживаться в газе внешними воздействиями: в газе может иметься поддерживаемый внешними источниками градиент температуры, газ может совершать стационарное движение (не сводящееся к движению как целого) и т. п.

Поставим задачу о вычислении флуктуаций функции распределения $f(t,\ \mathbf{r},\ \Gamma)$ относительно $\bar{f}(\mathbf{r},\ \Gamma)$. Эти флуктуации будут снова характеризоваться коррелятором (19,1), в котором усреднение производится обычным образом по времени при заданной разности $t=t_1-t_2$, и коррелятор зависит только от $t$. Ввиду неоднородности распределения $\bar{f}(\mathbf{r},\ \Gamma)$, однако, коррелятор будет