Интегрирование этих выражений (с максвелловской функцией $\bar{f}$) дает для коррелятора плотности:

$$\langle \delta N(t,\ \mathbf{r})\, \delta N(0,\ 0)\rangle = \bar{N}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \frac{1}{t^3} \exp\left(-\frac{mr^2}{2Tt^2}\right), \qquad (1)$$

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{\bar{N}}{k}\left(\frac{2\pi m}{T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2Tk^2}\right). \qquad (2)$$

2. То же для интеграла столкновений вида $\hat{I}_1 g = -g/\tau$ с постоянным временем τ.

Решение. Уравнение (19,16) сводится к алгебраическому. Определив из него $(\delta f_1 \delta f_2)^{(+)}_{\omega\mathbf{k}}$, найдем затем по (19,14):

$$(\delta f_1 \delta f_2)_{\omega\mathbf{k}} = \frac{2\tau \bar{f}(\mathbf{p}_1)}{1+\tau^2(\mathbf{k}\mathbf{v}_1-\omega)^2}\, \delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2). \qquad (3)$$

Отметим, что наличие даже малого числа столкновений меняет асимптотическое поведение спектрального коррелятора плотности при больших частотах, $\omega \gg k\bar{v}$, т. е. для флуктуаций с фазовой скоростью, много большей тепловой скорости молекул. Действительно, в этом пределе

$$(\delta N^2)_{\omega\mathbf{k}} = 2\bar{N}/\tau\omega^2, \qquad (4)$$

т. е. коррелятор убывает с увеличением частоты по степенному закону вместо экспоненциального в (2).

§ 20. Флуктуации функции распределения в неравновесном газе

Пусть газ находится в стационарном, но неравновесном состоянии с некоторой функцией распределения $\bar{f}(\mathbf{r},\ \Gamma)$, удовлетворяющей кинетическому уравнению

$$\mathbf{v}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{r}} = \operatorname{St} \bar{f}. \qquad (20,1)$$

Функция $\bar{f}$ может сильно отличаться от равновесной функции распределения f_0, так что интеграл столкновений $\operatorname{St}\bar{f}$ не предполагается линеаризованным по разности $\bar{f}-f_0$. Стационарное неравновесное состояние должно поддерживаться в газе внешними воздействиями: в газе может иметься поддерживаемый внешними источниками градиент температуры, газ может совершать стационарное движение (не сводящееся к движению как целого) и т. п.

Поставим задачу о вычислении флуктуаций функции распределения $f(t,\ \mathbf{r},\ \Gamma)$ относительно $\bar{f}(\mathbf{r},\ \Gamma)$. Эти флуктуации будут снова характеризоваться коррелятором (19,1), в котором усреднение производится обычным образом по времени при заданной разности $t = t_1 - t_2$, и коррелятор зависит только от t. Ввиду неоднородности распределения $\bar{f}(\mathbf{r},\ \Gamma)$, однако, коррелятор будет зависеть теперь от координат $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ по отдельности, а не только от их разности. Свойство (19,4) запишется теперь в виде

$$\langle \delta f_1(t)\, \delta f_2(0)\rangle = \langle \delta f_2(-t)\, \delta f_1(0)\rangle, \tag{20,2}$$

где

$$f_1(t) \equiv f(t,\ \mathbf{r}_1,\ \Gamma_1), \quad f_2(0) \equiv f(0,\ \mathbf{r}_2,\ \Gamma_2).$$

Соотношение же (19,5), связанное с обращением времени, в неравновесном случае, вообще говоря, отсутствует.

Коррелятор функции распределения по-прежнему удовлетворяет тому же уравнению (19,10):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} - \hat{I}_1\right) \langle \delta f_1(t)\, \delta f_2(0)\rangle = 0, \tag{20,3}$$

где $\hat{I}_1$ — линейный интегральный оператор (19,11), действующий на переменные Γ_1 [1]). Вопрос же о начальном условии к этому уравнению, т. е. о виде одновременного коррелятора, значительно более сложен, чем в равновесном случае, где он давался просто выражением (19,6). В неравновесном газе одновременный коррелятор сам определяется из некоторого кинетического уравнения, вид которого можно установить, воспользовавшись связью корреляционной функции с двухчастичной функцией распределения $\overline{f}^{(2)}$, введенной в § 16. В стационарном состоянии функция $\overline{f}^{(2)}(\mathbf{r}_1,\ \Gamma_1;\ \mathbf{r}_2,\ \Gamma_2)$, как и $\overline{f}(\mathbf{r},\ \Gamma)$, не зависит явно от времени.

Для вывода этой связи замечаем, что ввиду бесконечной малости фазового объема $d\tau = d^3x\, d\Gamma$ в нем может находиться одновременно не более одной частицы [2]). Поэтому среднее число $\overline{f}\, d\tau$ есть в то же время вероятность частице находиться в элементе $d\tau$ (вероятность же нахождения в нем сразу двух частиц есть величина более высокого порядка малости). Отсюда же следует, что среднее значение произведения чисел частиц в двух элементах $d\tau_1$ и $d\tau_2$ совпадает с вероятностью одновременного нахождения в каждом из них по одной частице. Для заданной пары частиц это есть, по определению двухчастичной функции распределения, произведение $\overline{f}_{12}^{(2)} d\tau_1 d\tau_2$. Но поскольку пара частиц может быть выбрана из (очень большого) полного числа частиц $\mathcal{N}(\mathcal{N}-1) \approx \mathcal{N}^2$ способами, то

$$\langle f_1 d\tau_1 \cdot f_2 d\tau_2\rangle = \mathcal{N}^2 \overline{f}_{12}^{(2)} d\tau_1 d\tau_2.$$

Получающееся таким образом равенство $\langle f_1 f_2\rangle = \mathcal{N}^2 \overline{f}_{12}^{(2)}$ относится, однако, лишь к различным точкам фазового пространства. Пере-

---

[1]) Использование этого уравнения в неравновесном случае введено *Лаксом* (*M. Lax*, 1966).

[2]) Следующий ниже вывод — перефразировка рассуждений из V, § 116.

ход же к пределу $\mathbf{r}_1, \Gamma_1 \to \mathbf{r}_2, \Gamma_2$ требует учета того, что если $d\tau_1$ и $d\tau_2$ совпадают, то атом, находящийся в $d\tau_1$, тем самым находится и в $d\tau_2$. Соотношение, учитывающее это обстоятельство, имеет вид

$$\langle f_1 f_2 \rangle = \mathcal{N}^2 \overline{f}_{12}^{(2)} + \overline{f}_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \qquad (20,4)$$

Действительно, умножим это равенство на $d\tau_1 d\tau_2$ и проинтегрируем по некоторому малому объему $\Delta\tau$. Первый член справа дает при этом малую величину второго порядка ($\sim (\Delta\tau)^2$); член же с δ-функциями дает $\overline{f}\Delta\tau$, т. е. величину первого порядка. Мы получим, следовательно,

$$\Big\langle \int\limits_{\Delta\tau} f\, d\tau \Big\rangle = \overline{f}\Delta\tau,$$

как и должно быть, принимая во внимание, что с точностью до величин первого порядка в малом объеме $\Delta\tau$ может находиться лишь 0 или 1 частица.

Подставив (20,4) в определение одновременного коррелятора

$$\langle \delta f_1(0)\, \delta f_2(0) \rangle = \langle f_1(0)\, f_2(0) \rangle - \overline{f}_1 \overline{f}_2,$$

получим искомую связь между ним и двухчастичной функцией распределения:

$$\langle \delta f_1(0)\, \delta f_2(0) \rangle = \mathcal{N}^2 \overline{f}_{12}^{(2)} - \overline{f}_1 \overline{f}_2 + \overline{f}_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\, \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (20,5)$$

В равновесном идеальном газе двухчастичная функция распределения сводится к произведению $\overline{f}_{12}^{(2)} = \overline{f}_1 \overline{f}_2 / \mathcal{N}^2$, и тогда (20,5) сводится к (19,6). В любом случае $\overline{f}_{12}^{(2)}$ стремится к указанному произведению при увеличении расстояния между точками *1* и *2*, так что

$$\langle \delta f_1(0)\, \delta f_2(0) \rangle \to 0 \text{ при } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty. \qquad (20,6)$$

Двухчастичная функция распределения удовлетворяет кинетическому уравнению, аналогичному уравнению Больцмана. Это уравнение можно было бы вывести из уравнения (16,9) для $\overline{f}^{(2)}$, подобно тому, как уравнение для одночастичной функции было выведено из (16,7) [1]). Мы, однако, дадим здесь вывод уравнения для $\overline{f}^{(2)}$, аналогичный основанному на наглядных физических соображениях выводу уравнения Больцмана в § 3.

---

[1]) В § 17 уравнение (16,9) использовалось лишь для специфической цели — для исключения $\overline{f}^{(2)}$ из уравнения для $\overline{f}$.

Будем рассматривать в качестве неизвестной не самую функцию $\bar{f}^{(2)}$, а разность

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \Gamma_1; \mathbf{r}_2, \Gamma_2) = \mathcal{N}^2 \bar{f}_{12}^{(2)} - \bar{f}_1 \bar{f}_2, \tag{20,7}$$

обращающуюся в нуль при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$ (коррелятор (20,5) без последнего члена). Эта величина является малой в обычном в теории флуктуаций смысле — порядка $1/\mathcal{N}$ по сравнению с $\bar{f}_1 \bar{f}_2$.

В отсутствие столкновений функция φ удовлетворяет уравнению, выражающему собой просто теорему Лиувилля — постоянство $\bar{f}^{(2)}$ вдоль фазовой траектории пары частиц:

$$\frac{d\bar{f}^{(2)}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_2} = 0. \tag{20,8}$$

Изменение же φ за счет столкновений связано с процессами двоякого рода.

Столкновения частиц *1* и *2* со всеми остальными частицами, но не друг с другом, приводят к появлению в правой стороне уравнения (20,8) членов $\hat{I}_1\varphi + \hat{I}_2\varphi$, где $\hat{I}_1$ и $\hat{I}_2$ — линейные интегральные операторы (19,11), действующие соответственно на переменные Γ_1 и Γ_2.

Столкновения же частиц *1* и *2* друг с другом играют особую роль; они приводят к одновременному «перескоку» обеих частиц *1* и *2* из одной пары точек фазового пространства в другую. В точности те же соображения, что и при выводе (3,7), дают в правой стороне (20,8) член вида $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\mathrm{St}_{12}\bar{f}$, где

$$\mathrm{St}_{12}\bar{f} = \int w(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma_1'\Gamma_2')(\bar{f}_1'\bar{f}_2' - \bar{f}_1\bar{f}_2)\, d\Gamma_1' d\Gamma_2' \tag{20,9}$$

(в этом интеграле флуктуациями можно пренебречь); множитель $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ выражает тот факт, что столкновения испытывают частицы, находящиеся в одной точке пространства[1]).

Таким образом, окончательно приходим к следующему уравнению:

$$\mathbf{v}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_2} - \hat{I}_1\varphi - \hat{I}_2\varphi = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\mathrm{St}_{12}\bar{f}. \tag{20,10}$$

Решив это уравнение, мы получим согласно (20,5) функцию, играющую роль начального условия к уравнению (20,3) при $t = 0$[2]).

---

[1]) Если проинтегрировать интеграл (20,9) еще и по $d\Gamma_2$, то получится обычный интеграл столкновений Больцмана.

[2]) Этот результат принадлежит *С. В. Ганцевичу*, *В. Л. Гуревичу* и *Р. Катилюсу* (1969) и *Ш. М. Когану* и *А. Я. Шульману* (1969).

Без правой части однородное уравнение (20,10) имеет решение

$$\varphi = f_{01}\Delta f_{02} + f_{02}\Delta f_{01}, \qquad \Delta f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{N}}\Delta\mathcal{N} + \frac{\partial f_0}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}\Delta\mathbf{V}, \tag{20,11}$$

отвечающее произвольным малым изменениям числа частиц, температуры и макроскопической скорости в равновесном распределении f_0.

Это «паразитное» решение, однако, исключается условием $\varphi \to 0$ при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$. Поэтому в равновесном случае, когда интеграл St_{12} тождественно обращается в нуль, из уравнения (20,10) следует $\varphi = 0$ и мы возвращаемся к начальному условию (19,6).

Правая сторона уравнения (20,10), т. е. парные столкновения между частицами в заданных состояниях Γ_1 и Γ_2, является, таким образом, источником одновременной корреляции флуктуаций в неравновесном газе. Приводя к одновременному изменению чисел заполнения двух состояний, парные столкновения порождают корреляцию между этими числами. В равновесном состоянии, ввиду точной компенсации прямых и обратных парных столкновений, этот механизм неэффективен и одновременные корреляции отсутствуют.

Если распределение $\bar{f}$ не зависит от координат $\mathbf{r}$ (как это может быть при поддержании неравновесности внешним полем), то можно поставить вопрос о флуктуациях функции распределения, усредненной по всему объему газа, т. е. о флуктуациях функции

$$f(t, \Gamma) = \frac{1}{\mathcal{V}}\int f(t, \mathbf{r}, \Gamma)\, d^3x \tag{20,12}$$

(которую мы обозначим той же буквой f, но без аргумента $\mathbf{r}$). Соответствующая корреляционная функция удовлетворяет уравнению, отличающемуся от (20,3) отсутствием члена с производной по координатам:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{F}_1\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \hat{I}_1\right)\langle\delta f(t, \Gamma_1)\,\delta f(0, \Gamma_2)\rangle = 0 \quad \text{при} \quad t > 0; \tag{20,13}$$

в левой стороне добавлен член, связанный с силой $\mathbf{F}$, действующей на частицы во внешнем поле. Одновременный же коррелятор

$$\langle\delta f(0, \Gamma_1)\,\delta f(0, \Gamma_2)\rangle =$$
$$= \mathcal{N}^2\bar{f}^{(2)}(\Gamma_1, \Gamma_2) - \bar{f}(\Gamma_1)\bar{f}(\Gamma_2) + \frac{\bar{f}(\Gamma_1)}{\mathcal{V}}\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) \equiv$$
$$\equiv \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) + \frac{\bar{f}(\Gamma_1)}{\mathcal{V}}\delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) \tag{20,14}$$

удовлетворяет уравнению

$$\left[\mathbf{F}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \mathbf{F}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} - (\hat{I}_1 + \hat{I}_2)\right] \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) = \mathrm{St}_{12}\, \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2). \quad (20,15)$$

Если газ находится в замкнутом сосуде, то это уравнение должно решаться при дополнительном условии, выражающем собой заданность (т. е. отсутствие флуктуаций) полного числа частиц в газе:

$$\int \langle \delta f(0, \Gamma_1)\, \delta f(0, \Gamma_2)\rangle\, d\Gamma_1 = \int \langle \delta f(0, \Gamma_1)\, \delta f(0, \Gamma_2)\rangle\, d\Gamma_2 = 0. \quad (20,16)$$

Это условие должно выполняться и в равновесном случае. Между тем выражение $\bar{f}(\Gamma_1)\, \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2)/\mathcal{V}$, соответствующее коррелятору (19,6), ему не удовлетворяет. Правильное выражение можно получить за счет произвола (20,11); подобрав должным образом параметр $\Delta\mathcal{N}$, получим

$$\langle \delta f(0, \Gamma_1)\, \delta f(0, \Gamma_2)\rangle = \frac{1}{\mathcal{V}} \bar{f}(\Gamma_1)\, \delta(\Gamma_1 - \Gamma_2) - \frac{1}{\mathcal{N}} \bar{f}(\Gamma_1)\, \bar{f}(\Gamma_2). \quad (20,17)$$

Отметим, что этот коррелятор содержит также и не δ-функционный член.