ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

§ 21. Уравнение Фоккера — Планка

Значительную категорию кинетических явлений составляют процессы, в которых средние изменения величин (от которых зависит функция распределения) в каждом элементарном акте малы по сравнению с их характерными значениями. Времена релаксации таких процессов велики по сравнению с временами элементарных актов, составляющих их микроскопический механизм; в этом смысле такие процессы можно назвать медленными.

Типичный пример такого рода дает задача о релаксации по импульсам небольшой примеси тяжелого газа в легком (который сам по себе предполагается находящимся в равновесии). Ввиду малой концентрации тяжелых частиц, их столкновениями друг с другом можно пренебречь и рассматривать их столкновения лишь с частицами основного (легкого) газа. Но при столкновении тяжелой частицы с легкими ее импульс испытывает лишь относительно малое изменение.

Будем для определенности говорить именно об этом примере и выведем кинетическое уравнение, которому удовлетворяет в таком случае функция распределения частиц примеси по импульсам, $f(t, \mathbf{p})$.

Обозначим через $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\,d^3q$ отнесенную к единице времени вероятность изменения импульса $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - \mathbf{q}$ тяжелой частицы при элементарном акте — ее столкновении с легкой частицей. Тогда кинетическое уравнение для функции $f(t, \mathbf{p})$ запишется в виде

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{p})}{\partial t} = \int \{w(\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{q})\, f(t, \mathbf{p}+\mathbf{q}) - w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, f(t, \mathbf{p})\}\, d^3q, \tag{21,1}$$

где справа стоит разность между числом частиц, поступающих (в 1 с) в заданный элемент импульсного пространства d^3p и покидающих его за то же время. Согласно сделанным предположениям, функция $w(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ быстро убывает с увеличением $\mathbf{q}$, так что основную роль в интеграле играют значения $\mathbf{q}$, малые по сравнению со средним импульсом частиц. Это обстоятельство позволяет произвести в подынтегральном выражении разложение

$$w(\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{q})\, f(t, \mathbf{p}+\mathbf{q}) \approx w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, f(t, \mathbf{p}) + \mathbf{q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, f(t, \mathbf{p}) + \frac{1}{2} q_\alpha q_\beta \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} w(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, f(t, \mathbf{p}).$$

В результате кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left\{\tilde{A}_\alpha f+\frac{\partial}{\partial p_\beta}(B_{\alpha\beta}f)\right\}, \tag{21,2}$$

где

$$\tilde{A}_\alpha=\int q_\alpha w(\mathbf{p},\ \mathbf{q})\,d^3q, \quad B_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\int q_\alpha q_\beta w(\mathbf{p},\ \mathbf{q})\,d^3q. \tag{21,3}$$

Таким образом, кинетическое уравнение из интегро-дифференциального становится дифференциальным. Величины $\tilde{A}_\alpha$ и $B_{\alpha\beta}$ можно записать в символическом виде, более ясно выражающем их смысл:

$$\tilde{A}_\alpha=\frac{\sum q_\alpha}{\delta t}, \quad B_{\alpha\beta}=\frac{\sum q_\alpha q_\beta}{2\delta t}, \tag{21,4}$$

где знаки $\sum$ означают суммирование по (большому) числу столкновений, происходящих за время δt.

Выражение в правой стороне (21,2) имеет вид дивергенции в импульсном пространстве, $-\partial s_\alpha/\partial p_\alpha$, от вектора

$$s_\alpha=-\tilde{A}_\alpha f-\frac{\partial}{\partial p_\beta}(B_{\alpha\beta}f)=-A_\alpha f-B_{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial p_\beta}, \quad A_\alpha=\tilde{A}_\alpha+\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial p_\beta}. \tag{21,5}$$

Другими словами, (21,2) имеет, как и следовало, вид уравнения непрерывности в импульсном пространстве; тем самым автоматически соблюдается сохранение числа частиц при процессе. Вектор же $\mathbf{s}$ является плотностью потока частиц в импульсном пространстве.

Согласно формулам (21,4), коэффициенты в кинетическом уравнении выражаются через средние характеристики столкновений, и в этом смысле их вычисление представляет собой механическую задачу. Фактически, однако, нет необходимости в раздельном вычислении коэффициентов A_α и $B_{\alpha\beta}$; они могут быть выражены друг через друга из условия обращения потока в нуль в статистическом равновесии. В данном случае равновесная функция распределения есть

$$f=\mathrm{const}\cdot e^{-\mathbf{p}^2/2MT},$$

где M — масса частиц тяжелого газа, а T — температура основного (легкого) газа. Подстановка этого выражения в уравнение $\mathbf{s}=0$ дает

$$MTA_\alpha=B_{\alpha\beta}p_\beta. \tag{21,6}$$

Таким образом, кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f(t,\ \mathbf{p})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left[B_{\alpha\beta}\left(\frac{p_\beta}{MT}f+\frac{\partial f}{\partial p_\beta}\right)\right]. \tag{21,7}$$

Отметим, что коэффициенты в двух первых членах разложения интеграла столкновений оказываются одинакового порядка величины; это связано с тем, что усреднение первых степеней знакопеременных величин q_α в (21,4) связано с бо́льшим погашением, чем при усреднении квадратичных выражений. Дальнейшие же члены разложения будут уже все малы по сравнению с двумя первыми.

Единственный вектор, от которого могут зависеть коэффициенты $B_{\alpha\beta}$, — импульс тяжелых частиц $\mathbf{p}$. Но если скорости этих частиц, $\mathbf{p}/M$, в среднем малы по сравнению со скоростями легких частиц, то при столкновениях их можно считать неподвижными; в этом приближении величины $B_{\alpha\beta}$ не будут зависеть от $\mathbf{p}$. Другими словами, тензор $B_{\alpha\beta}$ сведется к постоянному скаляру B:

$$B_{\alpha\beta}=B\delta_{\alpha\beta}, \qquad B=\frac{1}{6}\int q^2 w(0, \mathbf{q})\, d^3q, \tag{21,8}$$

а уравнение (21,7) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}=B\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{p}}{MT}f+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right). \tag{21,9}$$

Обратим внимание на формальное сходство уравнения (21,7) с уравнением диффузии во внешнем поле, в особенности наглядное в записи (21,9). Напомним, что уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\operatorname{div}(D\nabla c-bc\mathbf{F}),$$

где c — концентрация примеси, $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу примеси со стороны внешнего поля, D — коэффициент диффузии, b — подвижность. Описываемые уравнением (21,9) процессы можно назвать диффузией в импульсном пространстве, причем B играет роль коэффициента диффузии; связь между коэффициентами при обоих членах в правой стороне (21,9) аналогична известному соотношению Эйнштейна между коэффициентом диффузии и подвижностью: $D=bT$ (см. VI, § 59).

Кинетическое уравнение вида (21,2), в котором коэффициенты определены через усредненные характеристики элементарных актов согласно (21,4), называют *уравнением Фоккера—Планка* (*A. D. Fokker*, 1914; *M. Planck*, 1917). Специфические свойства переменных p_α как импульсов частиц в изложенном выводе не играли роли. Ясно поэтому, что уравнение такого же типа будет справедливо и для функций распределения f по другим переменным, если только выполнены условия, лежащие в основе вывода: относительная малость изменения величин в элементарных актах и линейность по f интегрального оператора, выражающего изменение функции благодаря этим актам.

Упомянем, для примера, еще случай, когда легкий газ составляет небольшую примесь к тяжелому газу. При столкновениях с тяжелыми частицами импульс легкой частицы сильно меняется по направлению, но лишь незначительно по абсолютной величине. Хотя для функции распределения частиц примесного газа по вектору импульса $\mathbf{p}$ уравнение (21,7) в этих условиях будет уже неприменимо, аналогичное уравнение можно установить для распределения по одной лишь абсолютной величине p. Если функция распределения по-прежнему отнесена к элементу импульсного пространства d^3p (так что число частиц с величиной p в интервале dp есть $f(t,\ p)\cdot 4\pi p^2 dp$), то уравнение Фоккера—Планка будет иметь место для функции $4\pi p^2 f$, отнесенной к элементу dp

$$\frac{\partial f p^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p}\left\{f p^2 A + B\frac{\partial}{\partial p} f p^2\right\},$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p} p^2\left\{fA + \frac{B}{p^2}\frac{\partial}{\partial p} f p^2\right\}, \qquad (21,10)$$

где

$$B = \frac{1}{2}\frac{\sum (\delta p)^2}{\delta t}. \qquad (21,11)$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой радиальный поток s в импульсном пространстве. Он должен обращаться в нуль равновесным распределением

$$f = \text{const}\cdot e^{-p^2/2mT}$$

(где m—масса легкой частицы, а T—температура основного, тяжелого газа). Это условие связывает величины A и B, и в результате кинетическое уравнение (21,10) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{p^2}\frac{\partial p^2 s}{\partial p}, \qquad s = -B\left(\frac{p}{mT} f + \frac{\partial f}{\partial p}\right). \qquad (21,12)$$

Задачи

1. Определить коэффициент диффузии в импульсном пространстве (B в уравнении (21,9)) для примеси тяжелого газа в легком, предполагая скорости тяжелых частиц малыми по сравнению со скоростями легких.

Решение. Как указано в тексте, в данных условиях при вычислении передачи импульса можно считать тяжелую частицу неподвижной и пренебречь изменением ее энергии при столкновении. Изменение импульса тяжелой частицы вычисляется тогда как (совпадающее с ним) изменение импульса легкой частицы: $(\Delta\mathbf{p})^2 = 2p'^2(1-\cos\alpha)$, где p'—величина импульса легкой частицы, а α—угол его поворота при рассеянии. Отсюда

$$\sum (\Delta\mathbf{p})^2 = \delta t \int 2p'^2 (1-\cos\alpha)\, Nv'\, d\sigma$$

(где N — плотность числа частиц легкого газа) и окончательно

$$B=\frac{N}{3m}\langle p'^3\sigma_t\rangle,$$

где $\sigma_t=\int(1-\cos\alpha)\,d\sigma$ — транспортное сечение, а усреднение производится по распределению частиц легкого газа.

2. С помощью уравнения Фоккера—Планка определить подвижность тяжелой частицы в легком газе.

Решение. При наличии внешнего поля в левой стороне уравнения (21,9) добавляется член $\mathbf{F}\,\partial f/\partial\mathbf{p}$, где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу. Предполагая эту силу малой, ищем стационарное решение уравнения в виде $f=f_0+\delta f$, где f_0 — максвелловское распределение, а $\delta f\ll f_0$. Для δf находим уравнение

$$B\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\left(\frac{\partial\,\delta f}{\partial\mathbf{p}}+\frac{\mathbf{p}}{MT}\,\delta f\right)=\mathbf{F}\,\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{p}}.$$

Отсюда

$$B\left(\frac{\partial\,\delta f}{\partial\mathbf{p}}+\frac{\mathbf{p}}{MT}\,\delta f\right)=\mathbf{F}f_0$$

и затем $\delta f=f_0\mathbf{F}\mathbf{p}/B$. Подвижность b есть коэффициент в равенстве

$$\overline{\mathbf{v}}=\int\delta f\cdot\mathbf{v}\,d^3p=b\mathbf{F}.$$

Вычисление интеграла дает

$$b=\frac{T}{B}=\frac{3mT}{N\langle\sigma_t p'^3\rangle}$$

в согласии с (12,4).

§ 22. Слабо ионизованный газ в электрическом поле

Рассмотрим ионизованный газ, находящийся в однородном электрическом поле $\mathbf{E}$. Поле нарушает равновесное распределение свободных электронов в газе и создает в нем электрический ток. Выведем кинетическое уравнение, определяющее электронное распределение[1]).

Слабость ионизации означает, что концентрация электронов (и ионов) в газе мала. Поэтому основную роль играют столкновения электронов лишь с нейтральными молекулами; столкновениями же электронов друг с другом (и с ионами) можно пренебречь. Будем предполагать также, что средняя энергия, приобретаемая электронами в электрическом поле (даже если поле сильное; см. ниже), недостаточна для возбуждения или ионизации молекул; тогда столкновения электронов с молекулами можно считать упругими.

Ввиду большой разницы в массах электронов m и молекул M, средняя скорость электронов велика по сравнению со средней

[1]) Изложенная в этом параграфе теория принадлежит *Б. И. Давыдову* (1936). Предельная формула (22,18) была еще раньше получена *Друйвестейном* (*M. J. Druyvesteyn*, 1930).