(где N — плотность числа частиц легкого газа) и окончательно

$$B=\frac{N}{3m}\langle p'^3\sigma_t\rangle,$$

где $\sigma_t=\int(1-\cos\alpha)\,d\sigma$ — транспортное сечение, а усреднение производится по распределению частиц легкого газа.

2. С помощью уравнения Фоккера—Планка определить подвижность тяжелой частицы в легком газе.

Решение. При наличии внешнего поля в левой стороне уравнения (21,9) добавляется член $\mathbf{F}\,\partial f/\partial\mathbf{p}$, где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицу. Предполагая эту силу малой, ищем стационарное решение уравнения в виде $f=f_0+\delta f$, где f_0 — максвелловское распределение, а $\delta f\ll f_0$. Для δf находим уравнение

$$B\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\left(\frac{\partial\,\delta f}{\partial\mathbf{p}}+\frac{\mathbf{p}}{MT}\,\delta f\right)=\mathbf{F}\,\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{p}}.$$

Отсюда

$$B\left(\frac{\partial\,\delta f}{\partial\mathbf{p}}+\frac{\mathbf{p}}{MT}\,\delta f\right)=\mathbf{F}f_0$$

и затем $\delta f=f_0\mathbf{F}\mathbf{p}/B$. Подвижность b есть коэффициент в равенстве

$$\overline{\mathbf{v}}=\int\delta f\cdot\mathbf{v}\,d^3p=b\mathbf{F}.$$

Вычисление интеграла дает

$$b=\frac{T}{B}=\frac{3mT}{N\langle\sigma_t p'^3\rangle}$$

в согласии с (12,4).

§ 22. Слабо ионизованный газ в электрическом поле

Рассмотрим ионизованный газ, находящийся в однородном электрическом поле $\mathbf{E}$. Поле нарушает равновесное распределение свободных электронов в газе и создает в нем электрический ток. Выведем кинетическое уравнение, определяющее электронное распределение[1]).

Слабость ионизации означает, что концентрация электронов (и ионов) в газе мала. Поэтому основную роль играют столкновения электронов лишь с нейтральными молекулами; столкновениями же электронов друг с другом (и с ионами) можно пренебречь. Будем предполагать также, что средняя энергия, приобретаемая электронами в электрическом поле (даже если поле сильное; см. ниже), недостаточна для возбуждения или ионизации молекул; тогда столкновения электронов с молекулами можно считать упругими.

Ввиду большой разницы в массах электронов m и молекул M, средняя скорость электронов велика по сравнению со средней

[1]) Изложенная в этом параграфе теория принадлежит *Б. И. Давыдову* (1936). Предельная формула (22,18) была еще раньше получена *Друйвестейном* (*M. J. Druyvesteyn*, 1930).

скоростью молекул. По той же причине импульс электрона при столкновении меняется сильно по направлению, но лишь слабо по абсолютной величине. В этих условиях интеграл столкновений в кинетическом уравнении разбивается в сумму двух частей, представляющих изменения числа частиц в заданном элементе импульсного пространства соответственно от изменения величины и от изменения направления импульса; первая из этих частей может быть представлена в фоккер-планковском дифференциальном виде.

Ввиду симметрии вокруг направления поля, функция распределения зависит (помимо времени) только от двух переменных: от абсолютной величины импульса p и от угла θ между $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ и направлением $\mathbf{E}$ (которое выберем в качестве оси z). Кинетическое уравнение для функции $f(t, p, \theta)$ имеет вид[1])

$$\frac{\partial f}{\partial t}-e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=-\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2 s+Nv\int[f(t, p, \theta')-f(t, p, \theta)]\,d\sigma, \qquad (22,1)$$

где

$$s=-B\left(\frac{v}{T}f+\frac{\partial f}{\partial p}\right), \qquad B=\frac{\sum(\Delta p)^2}{2\delta t}.$$

Первый член в правой стороне (22,1) отвечает правой стороне уравнения Фоккера—Планка (21,12). Второй же член есть интеграл столкновений по отношению к изменению направления импульса. В этом интеграле молекулы можно считать неподвижными (N — плотность их числа); тогда число столкновений, испытываемых электроном в единицу времени и меняющих направление импульса от θ и θ' (или от θ' и θ), есть $Nv\,d\sigma$, где $d\sigma$ — сечение рассеяния электрона на неподвижной молекуле, зависящее от p и от угла α между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ (предполагается, что сечение уже усреднено по ориентациям молекулы).

Ниже будет рассматриваться стационарное состояние с независящей от времени функцией распределения, соответственно чему член $\partial f/\partial t$ в уравнении (22,1) будет опущен.

Для вычисления величины B воспользуемся равенством

$$(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2=(\mathbf{v}'-\mathbf{V}')^2,$$

выражающим неизменность величины относительной скорости двух частиц при упругом столкновении ($\mathbf{v}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{v}'$, $\mathbf{V}'$ — начальные и конечные скорости электрона и молекулы). Изменение скорости молекулы мало по сравнению с изменением скорости электрона: $\Delta\mathbf{V}=-m\Delta\mathbf{v}/M$; поэтому после раскрытия написан-

---

[1]) В этой книге e обозначает везде положительную величину — абсолютное значение элементарного заряда. Заряд электрона есть поэтому $-e$.

ного равенства можно положить в нем $\mathbf{V}=\mathbf{V}'$. Тогда

$$2\mathbf{V}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')=v^2-v'^2\approx 2v\,\Delta v,$$

где $\Delta v=v-v'$ — малая величина. Таким образом,

$$(\Delta p)^2=m^2(\Delta v)^2=\frac{m^2}{v^2}[(\mathbf{V}\mathbf{v})^2+(\mathbf{V}\mathbf{v}')^2-2(\mathbf{V}\mathbf{v})(\mathbf{V}\mathbf{v}')].$$

Усреднение этого выражения осуществляется в два этапа. Прежде всего, усредняем по распределению (максвелловскому) скоростей молекул $\mathbf{V}$. Ввиду изотропии этого распределения имеем $\langle V_\alpha V_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}\langle V^2\rangle/3$, а средний квадрат $\langle V^2\rangle=3T/M$. Поэтому получаем

$$(\Delta p)^2=\frac{m^2T}{Mv^2}(v^2+v'^2-2\mathbf{v}\mathbf{v}')\approx\frac{2m^2T}{M}(1-\cos\alpha). \tag{22,2}$$

Теперь надо усреднить по столкновениям, испытываемым электроном в единицу времени; это осуществляется интегрированием по $Nv\,d\sigma$. В результате получим

$$B=\frac{Nm^2v\sigma_tT}{M}=\frac{pmT}{Ml}, \tag{22,3}$$

где $\sigma_t=\int(1-\cos\alpha)\,d\sigma$ — транспортное сечение, а l — длина свободного пробега, определенная как

$$l=1/N\sigma_t \tag{22,4}$$

(в общем случае l — функция p). Таким образом, фигурирующий в (22,1) поток

$$s=-\frac{mp}{Ml}\left(vf+T\frac{\partial f}{\partial p}\right). \tag{22,5}$$

Обратим внимание на то, что согласно (22,2) изменение энергии электрона при столкновении $\Delta\varepsilon\sim\bar{v}\Delta p\sim T(m/M)^{1/2}\sim\bar{\varepsilon}(m/M)^{1/2}$. Поэтому заметное изменение этой энергии происходит лишь в результате $\sim M/m$ столкновений, между тем как направление импульса электрона существенно меняется уже в одном столкновении. Другими словами, время релаксации по энергиям электронов $\tau_\varepsilon\sim\tau_pM/m$, где $\tau_p\sim l/\bar{v}$ — время релаксации по направлениям импульса.

Левую сторону уравнения (22,1) тоже надо преобразовать к переменным p и θ:

$$e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=eE\frac{\partial f}{\partial p_z}=eE\left[\cos\theta\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\sin^2\theta}{p}\frac{\partial f}{\partial\cos\theta}\right]. \tag{22,6}$$

Решение составленного таким образом кинетического уравнения можно искать в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$f(p,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(p)P_n(\cos\theta). \tag{22,7}$$

Мы увидим ниже, что последовательные члены этого разложения быстро убывают по порядку величины. Поэтому фактически достаточно ограничиться двумя первыми членами разложения:

$$f(p, \theta)=f_0(p)+f_1(p)\cos\theta. \tag{22,8}$$

Интеграл в (22,1) при подстановке (22,8) дает

$$\int [f(p, \theta')-f(p, \theta)]\,d\sigma = -f_1\sigma_t\cos\theta$$

(ср. преобразование такого же интеграла в (11,1)), после чего кинетическое уравнение принимает вид

$$-eE\left[f_0'\cos\theta+f_1'\cos^2\theta+\frac{f_1}{p}\sin^2\theta\right]+\frac{1}{p^2}(s_0p^2)'+\frac{v}{l}f_1\cos\theta=0,$$

где штрих означает дифференцирование по p; здесь опущен член $p^{-2}(s_1p^2)'\cos\theta$, заведомо малый (в отношении $\sim m/M$) по сравнению с членом $(vf_1/l)\cos\theta$ (s_0 и s_1 — выражения (22,5) с f_0 или f_1 вместо f). Умножив это уравнение на $P_0=1$ или на $P_1=\cos\theta$ и проинтегрировав его по $d\cos\theta$, получим два уравнения:

$$\frac{1}{p^2}(p^2S)'=0, \qquad S=-\frac{1}{lM}(p^2f_0+mpTf_0')-\frac{eE}{3}f_1, \tag{22,9}$$

$$f_1=\frac{eEl}{v}f_0'. \tag{22,10}$$

Выражение S представляет собой плотность потока частиц в импульсном пространстве, измененного электрическим полем. Из (22,9) следует, что $S=\mathrm{const}/p^2$. Но поток S должен быть конечен при всех значениях p; поэтому $\mathrm{const}=0$. Подставив теперь f_1 из (22,10) в уравнение $S=0$, найдем уравнение, определяющее функцию $f_0(p)$:

$$\left[pT+\frac{(eEl)^2M}{3p}\right]f_0'+\frac{p^2}{m}f_0=0. \tag{22,11}$$

До сих пор мы не делали никаких предположений о виде функции $l(p)$, а интеграл уравнения первого порядка (22,11) может быть написан с произвольной функцией $l(p)$. С целью получения более конкретных результатов предположим $l=\mathrm{const}$, что эквивалентно предположению о независимости сечения σ_t от импульса[1]). Тогда интегрирование уравнения (22,11) дает

$$f_0(p)=\mathrm{const}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{T}+\frac{\gamma^2}{6}\right)^{\gamma^2/6}e^{-\varepsilon/T}, \tag{22,12}$$

---

[1]) Это во всяком случае выполняется при достаточно низких температурах электронов, поскольку для медленных частиц сечение стремится к независящему от энергии пределу (см. III, § 132).

где

$$\gamma = \frac{eEl}{T}\sqrt{\frac{M}{m}}. \qquad (22,13)$$

Для функции же $f_1(p)$ из (22,10) и (22,12) имеем

$$f_1 = -f_0\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{\gamma\varepsilon/T}{\varepsilon/T+\gamma^2/6}. \qquad (22,14)$$

Величина γ является тем параметром, который характеризует степень воздействия поля на распределение электронов. Предельный случай слабых полей отвечает неравенству $\gamma \ll 1$. В первом приближении $f_0(p)$ сводится тогда к невозмущенному максвелловскому распределению ($f_0 \propto e^{-\varepsilon/T}$, $\bar{\varepsilon} = 3T/2$), а

$$f_1 = -\frac{eEl}{T}f_0, \quad \gamma \ll 1. \qquad (22,15)$$

Возникающий в газе электрический ток определяется подвижностью электронов

$$b = \frac{\bar{v}_z}{-eE} = \frac{1}{-eEN_e}\int v\cos\theta\cdot f\,d^3p = -\frac{1}{3eEN_e}\int vf_1\,d^3p \qquad (22,16)$$

(N_e — плотность числа электронов)[1]. Простое вычисление с f_1 из (22,15) дает для подвижности в слабом поле

$$b_0 = \frac{2^{3/2}l}{3\pi^{1/2}(mT)^{1/2}}. \qquad (22,17)$$

Как и следовало, это выражение удовлетворяет соотношению Эйнштейна $D = bT$, где D — коэффициент диффузии (11,10).

Смысл неравенства $\gamma \ll 1$ как критерия слабости поля можно понять из следующих простых соображений. Очевидно, что влияние поля на распределение электронов будет слабым до тех пор, пока энергия, набираемая электроном за время его свободного пробега, будет мала по сравнению с энергией, отдаваемой им атому при столкновении. Первая из них есть eEl, а вторая —

$$\delta\varepsilon \sim V\delta P \sim Vp \sim \sqrt{\frac{T}{M}}\sqrt{Tm}$$

(P и V — импульс и скорость атома; изменение δP порядка величины импульса электрона). Сравнение обоих выражений и приводит к требуемому критерию.

---

[1]) Отметим, что, ввиду ортогональности различных полиномов Лежандра, из всех членов разложения (22,7) вклад в нормировочный интеграл дает только член f_0, а вклад в $\bar{v}_z$ — только член $f_1\cos\theta$.

В обратном случае сильных полей ($\gamma \gg 1$) находим[1])

$$f_0(p) = A \exp\left(-\frac{3\varepsilon^2}{\gamma^2 T^2}\right), \qquad A = \frac{3^{3/4} N_e}{2^{3/2}\pi\Gamma(3/4)(m\gamma T)^{3/2}}, \tag{22,18}$$

$$f_1 = -6\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{\varepsilon}{T\gamma} f_0. \tag{22,19}$$

Средняя энергия электронов:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2M}{3m}}\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right) eEl = 0{,}43 eEl\sqrt{\frac{M}{m}}, \tag{22,20}$$

а их подвижность

$$b = \frac{4\Gamma(5/4)\, l^{1/2}}{3^{3/4}\pi^{1/2}(mM)^{1/4}(eE)^{1/2}}. \tag{22,21}$$

Остается выяснить критерий сходимости разложения (22,7). Для этого замечаем, что его последовательные члены связаны, по порядку величины, соотношением

$$\frac{eE}{mv} f_{n-1} \sim \frac{v}{l} f_n \tag{22,22}$$

(после подстановки (22,7), умножения на $P_n(\cos\theta)$ и интегрирования по $d\cos\theta$ в левой стороне кинетического уравнения остается член с f_{n-1}, а в интеграле столкновений — лишь с f_n). При $\gamma \ll 1$ средняя энергия электрона $\bar{\varepsilon} \sim T$, и из (22,22) имеем

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \sim \frac{eEl}{T} \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll 1.$$

В случае же больших полей, когда $\gamma \gg 1$, средняя энергия $\bar{\varepsilon} \sim eEl(M/m)^{1/2}$, так что снова

$$f_n/f_{n-1} \sim (m/M)^{1/2} \ll 1.$$

Таким образом, сходимость разложения обеспечивается малостью отношения m/M[2]).

§ 23. Флуктуации в слабо ионизованном неравновесном газе

В этом параграфе мы рассмотрим флуктуации функции распределения электронов в стационарном неравновесном состоянии слабо ионизованного газа; газ пространственно-однороден и находится в постоянном однородном электрическом поле **E**.

---

[1]) Формулу (22,18) проще получить, решая заново уравнение (22,11) (положив в нем $T=0$), чем путем предельного перехода в (22,12).

[2]) Отметим, однако, что поправки f_2, f_3, ... нельзя было бы определять с помощью уравнения (22,1), так как в этом уравнении использовано фоккер-планковское приближение, в котором величинами высших степеней по m/M уже пренебрежено.