В обратном случае сильных полей ($\gamma \gg 1$) находим[1])

$$f_0(p) = A \exp\left(-\frac{3\varepsilon^2}{\gamma^2 T^2}\right), \qquad A = \frac{3^{3/4} N_e}{2^{3/2}\pi\Gamma(3/4)(m\gamma T)^{3/2}}, \qquad (22,18)$$

$$f_1 = -6\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{\varepsilon}{T\gamma} f_0. \qquad (22,19)$$

Средняя энергия электронов:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2M}{3m}}\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right) eEl = 0{,}43 eEl\sqrt{\frac{M}{m}}, \qquad (22,20)$$

а их подвижность

$$b = \frac{4\Gamma(5/4)\, l^{1/2}}{3^{3/4}\pi^{1/2}(mM)^{1/4}(eE)^{1/2}}. \qquad (22,21)$$

Остается выяснить критерий сходимости разложения (22,7). Для этого замечаем, что его последовательные члены связаны, по порядку величины, соотношением

$$\frac{eE}{mv} f_{n-1} \sim \frac{v}{l} f_n \qquad (22,22)$$

(после подстановки (22,7), умножения на $P_n(\cos\theta)$ и интегрирования по $d\cos\theta$ в левой стороне кинетического уравнения остается член с f_{n-1}, а в интеграле столкновений — лишь с f_n). При $\gamma \ll 1$ средняя энергия электрона $\bar{\varepsilon} \sim T$, и из (22,22) имеем

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \sim \frac{eEl}{T} \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll 1.$$

В случае же больших полей, когда $\gamma \gg 1$, средняя энергия $\bar{\varepsilon} \sim eEl(M/m)^{1/2}$, так что снова

$$f_n/f_{n-1} \sim (m/M)^{1/2} \ll 1.$$

Таким образом, сходимость разложения обеспечивается малостью отношения m/M[2]).

§ 23. Флуктуации в слабо ионизованном неравновесном газе

В этом параграфе мы рассмотрим флуктуации функции распределения электронов в стационарном неравновесном состоянии слабо ионизованного газа; газ пространственно-однороден и находится в постоянном однородном электрическом поле **E**.

[1]) Формулу (22,18) проще получить, решая заново уравнение (22,11) (положив в нем $T = 0$), чем путем предельного перехода в (22,12).

[2]) Отметим, однако, что поправки f_2, f_3, ... нельзя было бы определять с помощью уравнения (22,1), так как в этом уравнении использовано фоккер-планковское приближение, в котором величинами высших степеней по m/M уже пренебрежено.

Мы будем интересоваться лишь временной, но не пространственной корреляцией флуктуаций. Тогда имеет смысл ввести вместо зависящей от координат точной (флуктуирующей) функции распределения $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ усредненную по всему объему газа функцию

$$f(t, \mathbf{p}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d^3x \tag{23,1}$$

(которую мы будем в этом параграфе обозначать той же буквой f, без аргумента $\mathbf{r}$); эта функция флуктуирует только со временем. Функция же $\bar{f}(\mathbf{p})$, по отношению к которой флуктуирует f, есть найденное в предыдущем параграфе распределение (22,8).

Для рассматриваемой системы представляют особый интерес не столько флуктуации функции распределения самой по себе, сколько связанные с ними флуктуации плотности электрического тока $\mathbf{j}$. Корреляторы этих величин связаны друг с другом очевидной формулой

$$\langle \delta j_\alpha(t)\, \delta j_\beta(0) \rangle = e^2 \int \langle \delta f(t, \mathbf{p})\, \delta f(0, \mathbf{p}') \rangle\, v_\alpha v'_\beta\, d^3p\, d^3p', \tag{23,2}$$

причем, разумеется, $\delta\mathbf{j}$ есть флуктуация плотности тока, усредненная по объему газа[1]).

Решение задачи для неравновесного газа основано на указанном в § 20 общем методе[2]).

Согласно этому методу, коррелятор $\langle \delta f(t, \mathbf{p})\, \delta f(0, \mathbf{p}') \rangle$ удовлетворяет (по переменным t и $\mathbf{p}$) кинетическому уравнению (22,1), которое играет в данном случае роль уравнения (20,13) общего метода. Вместе с этим коррелятором такому же уравнению удовлетворяет и функция

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{p}) = \int \langle \delta f(t, \mathbf{p})\, \delta f(0, \mathbf{p}') \rangle\, \mathbf{v}'\, d^3p', \tag{23,3}$$

через которую в свою очередь выражается искомый коррелятор тока:

$$\langle \delta j_\alpha(t)\, \delta j_\beta(0) \rangle = e^2 \int g_\beta(t, \mathbf{p})\, v_\alpha\, d^3p. \tag{23,4}$$

---

[1]) Такое усреднение соответствует постановке опыта, в котором измеряются флуктуации полного тока в газе: флуктуация полного тока равна флуктуации усредненной плотности тока в данном направлении, умноженной на сечение образца.

[2]) Исследование этой задачи *Прайсом* (*P. J. Price*, 1959) явилось первым примером вычисления флуктуаций в неравновесной системе. Мы следуем здесь изложению *В. Л. Гуревича* и *Р. Катилюса* (1965).

Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}-e\left(\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\mathbf{g}=$$
$$=\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[p^2B\left(\frac{v}{T}\mathbf{g}+\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial p}\right)\right]-Nv\int[\mathbf{g}(t, p, \theta)-\mathbf{g}(t, p, \theta')]\,d\sigma \quad (23,5)$$

с B из (22,3).

Кинетическое уравнение (22,1) учитывает столкновения электронов только с молекулами, но не друг с другом. Поэтому здесь нет механизма, устанавливающего одновременную корреляцию между электронами с различными импульсами и «начальное» условие для функции $\mathbf{g}(t, \mathbf{p})$ будет таким же, как и в равновесном состоянии. Поскольку речь идет о флуктуации функции распределения, усредненной по всему объему газа, то должно быть учтено постоянство числа частиц (электронов)[1]. Согласно (20,17), при таком условии имеем

$$\langle\delta f(0, \mathbf{p})\,\delta f(0, \mathbf{p}')\rangle=\frac{1}{\mathscr{V}}\left[\bar{f}(\mathbf{p})\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')-\frac{1}{N_e}\bar{f}(\mathbf{p})\,\bar{f}(\mathbf{p}')\right]$$

(N_e — плотность электронов), откуда для начальной функции

$$\mathbf{g}(0, \mathbf{p})=\frac{1}{\mathscr{V}}\bar{f}(\mathbf{p})(\mathbf{v}-\mathbf{V}), \quad (23,6)$$

где $\mathbf{V}$ — средняя скорость электронов в состоянии с распределением $\bar{f}(\mathbf{p})$. Скорость $\mathbf{V}$ направлена, разумеется, вдоль поля $\mathbf{E}$; напишем ее в виде

$$\mathbf{V}=-eb\mathbf{E}, \quad (23,7)$$

где b — подвижность. Постоянство полного числа электронов означает также, что $\int \delta f\, d^3p=0$ и потому

$$\int \mathbf{g}(t, \mathbf{p})\,d^3p=0. \quad (23,8)$$

Следуя описанному в § 19 методу, совершаем над уравнением (23,5) одностороннее преобразование Фурье: умножаем его на $e^{i\omega t}$ и интегрируем по t в пределах от 0 до ∞. При этом член $e^{i\omega t}\,\partial \mathbf{g}/\partial t$ преобразуется по частям с учетом начального условия

[1]) Интересуясь только влиянием на флуктуации неравновесности, связанной с наличием поля, мы перенебрегаем флуктуациями полного числа электронов, связанными с процессами ионизации и рекомбинации. Строго эти флуктуации могут отсутствовать в случае, когда все электроны образованы примесями с малым потенциалом ионизации; полное число электронов совпадает тогда просто с полным числом примесных атомов. Пренебрегается также флуктуациями концентрации нейтральных молекул. Относительная флуктуация этой концентрации заведомо мала по сравнению с такой же для электронов, поскольку концентрация электронов много меньше концентрации молекул.

(23,6) и условия $\mathbf{g}(\infty, \mathbf{p}) = 0$. В результате получим уравнение

$$-i\omega \mathbf{g}^{(+)} - e\left(\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)\mathbf{g}^{(+)} - \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{mTp^3}{Ml}\left(\frac{v}{T}\mathbf{g}^{(+)} + \frac{\partial \mathbf{g}^{(+)}}{\partial p}\right)\right] + \\ + N_e v\int[\mathbf{g}^{(+)}(\mathbf{p}) - \mathbf{g}^{(+)}(\mathbf{p}')]\,d\sigma = \frac{1}{\mathcal{V}}\bar{f}(\mathbf{p})(\mathbf{v}-\mathbf{V}), \quad (23,9)$$

где

$$\mathbf{g}^{(+)}(\omega, \mathbf{p}) = \int_0^\infty e^{i\omega t}\mathbf{g}(t, \mathbf{p})\,d^3p. \quad (23,10)$$

В силу (23,8), это уравнение должно решаться при дополнительном условии

$$\int \mathbf{g}^{(+)}(\omega, \mathbf{p})\,d^3p = 0. \quad (23,11)$$

Если решение уравнения (23,9) найдено, то искомое спектральное разложение коррелятора токов можно найти простым интегрированием. Действительно, пишем

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int e^{i\omega t}\langle \delta f(t, \mathbf{p})\,\delta f(0, \mathbf{p}')\rangle v_\alpha v'_\beta\, d^3p\, d^3p'$$

и, поступив затем в точности аналогично выводу (19,14), получим

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = e^2\int \{g_\beta^{(+)}(\omega, \mathbf{p})v_\alpha + g_\alpha^{(+)}(-\omega, \mathbf{p})v_\beta\}\,d^3p. \quad (23,12)$$

Ниже будем считать для конкретности, что длина пробега $l = \mathrm{const}$. В равновесном состоянии, в отсутствие электрического поля, функция $\bar{f}$ есть равновесное максвелловское распределение $f_0(p)$. Решение уравнения (23,9) есть тогда

$$\mathbf{g}^{(+)} = \frac{\mathbf{p}}{p}\frac{f_0(p)}{\mathcal{V}}\frac{l}{1 - i\omega l/v}, \quad (23,13)$$

в чем легко убедиться, заметив, что

$$\int (\mathbf{p} - \mathbf{p}')\,d\sigma = \sigma_t \mathbf{p}. \quad (23,14)$$

Если $\omega\tau_p \ll 1$ (где $\tau_p \sim l/v_T$ — время релаксации по направлениям импульса), то в (23,13) можно пренебречь членом $-i\omega l/v$ в знаменателе. Вычисление интеграла (23,12) приводит тогда к результату

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \frac{2T\sigma}{\mathcal{V}}\delta_{\alpha\beta}, \quad (23,15)$$

где $\sigma = e^2 N_e b_0$ — проводимость газа в слабом поле; b_0 — подвижность в слабом поле, даваемая формулой (22,17). Результат (23,15) соответствует, конечно, общей формуле Найквиста для равновесных флуктуаций тока (см. IX, § 78). Действительно, рассмотрим цилиндрический вдоль оси x объем газа. Поскольку плотность тока уже усреднена по объему, то полный ток $J=j_xS$, где S — площадь сечения цилиндра. Из (23,15) имеем тогда

$$(J^2)_\omega=\frac{2T\sigma S^2}{\mathcal{V}}=\frac{2T\sigma S}{L}=\frac{2T}{R}, \tag{23,16}$$

где $L=\mathcal{V}/S$ — длина образца, а $R=L/\sigma S$ — его сопротивление[1]).

При $\mathbf{E}\neq 0$ уравнение (23,9) решается последовательными приближениями, подобно тому, как решалось уравнение (22,6). Но в то время, как уравнение (22,6) определяло скалярную функцию, уравнение (23,9) написано для векторной функции. Первые члены разложения такой функции (зависящей от двух векторов — постоянного $\mathbf{E}$ и переменного $\mathbf{p}$) напишем в виде

$$\mathbf{g}^{(+)}(\omega, \mathbf{p})=h(\omega, p)\,\mathbf{n}+\mathbf{e}\,\{g_0(\omega, p)+\mathbf{ne}\,g_1(\omega, p)\}, \tag{23,17}$$

причем $g_1\ll g_0$ (здесь $\mathbf{n}=\mathbf{p}/p$, $\mathbf{e}=\mathbf{E}/E$). Функция же $\bar f(\mathbf{p})$ есть

$$\bar f(\mathbf{p})=f_0(p)+\mathbf{ne}\,f_1(p) \tag{23,18}$$

с вычисленными в предыдущем параграфе f_0 и $f_1=eElf_0'/v$.

Подставим (23,17—18) в уравнение (23,9) и отделим в нем члены, нечетные и четные по $\mathbf{p}$. Снова полагая $\omega\tau_p\ll 1$, получим, собрав нечетные члены:

$$\frac{v}{l}\{h\mathbf{n}+g_1\mathbf{e}(\mathbf{ne})\}-\mathbf{e}\left(\mathbf{e}\frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{p}}\right)eE=\frac{f_0\mathbf{v}}{\mathcal{V}};$$

здесь опущены члены, заведомо малые (в отношении m/M) по сравнению с написанными. Отсюда

$$h(p)=\frac{l}{\mathcal{V}}f_0(p), \quad g_1(\omega, p)=\frac{eElm}{p}\frac{\partial g_0(\omega, p)}{\partial p}. \tag{23,19}$$

Что касается четных по $\mathbf{p}$ членов, то они должны удовлетворять уравнению (23,9) лишь после усреднения по направлениям $\mathbf{p}$ — в соответствии с тем, что выражение (23,17) дает лишь первые члены разложения искомой функции. После несложного вычисления (с использованием выражений (23,19)) получается следующее уравнение для функции $g_0(\omega, p)$:

$$-i\omega g_0+\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}(p^2S)=\frac{1}{\mathcal{V}}\left\{eEbf_0+\frac{2eEl}{3p}\frac{\partial}{\partial p}pf_0\right\}, \tag{23,20}$$

где

$$S=-\frac{1}{lM}\left(p^2g_0+mpT\frac{\partial g_0}{\partial p}\right)-\frac{e^2E^2lm}{3p}\frac{\partial g_0}{\partial p}.$$

1) При сравнении с IX (78,1), надо учесть, что $\hbar\omega\ll T$ и что в силу условия $\omega\tau_p\ll 1$ дисперсия проводимости отсутствует, так что $Z=R$.

Это уравнение надо решать при дополнительном условии

$$\int g_0(\omega, p)\, d^3p = 0, \tag{23,21}$$

к которому сводится (23,11) при подстановке в него (23,17).

По известной функции $g^{(+)}$ искомый коррелятор тока определяется формулой (23,12). При подстановке в нее разложения (23,17) и простого преобразования с использованием (23,19) получается

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \\ = \delta_{\alpha\beta}\frac{2e^2 l}{3\mathcal{V}}\int v f_0\, d^3p - E_\alpha E_\beta \frac{2le^3}{3E}\int [g_0(\omega, p) + g_0(-\omega, p)]\frac{d^3p}{p}. \tag{23,22}$$

Член $-i\omega g_0$ в уравнении (23,20) становится существенным при $\omega \sim mv/Ml$, т. е. при $\omega\tau_\varepsilon \sim 1$, где τ_ε — время релаксации по энергиям электронов. С таких частот начинается, следовательно, дисперсия флуктуаций тока.

В общем случае уравнение (23,20) очень сложно. Ограничимся, для иллюстрации, случаем малых частот, $\omega\tau_\varepsilon \ll 1$, и сильных полей, удовлетворяющих условию $\gamma \gg 1$, где γ — параметр (22,13). В силу последнего условия, функция $f_0(p)$ дается выражением (22,18). Вычисление интеграла в первом члене в (23,22) дает

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{2^{3/2}}{3^{5/4}\Gamma(3/4)}\frac{N_e e^2 l}{\mathcal{V}}\left(\frac{eEl}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}.$$

Во втором члене в (23,22) ограничимся буквенной оценкой. Из уравнения (23,20) (без члена $-i\omega g_0$) находим оценку

$$g_0 \sim \frac{eEl^2M}{\mathcal{V}p^2} f_0.$$

Интеграл оценивается затем как

$$e^3 lE\frac{g_0}{p}p^3.$$

В результате находим для коррелятора тока выражение

$$(j_\alpha j_\beta)_\omega = \frac{N_e e^2 l}{\mathcal{V}}\left(\frac{eEl}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}\left[0{,}6\delta_{\alpha\beta} - \beta\frac{E_\alpha E_\beta}{E^2}\right], \tag{23,23}$$

где $\beta \sim 1$ — численная постоянная.

§ 24. Рекомбинация и ионизация

Установление равновесной степени ионизации в частично ионизованном газе осуществляется путем различных элементарных актов столкновительной ионизации и обратной рекомбинации сталкивающихся заряженных частиц. В простейшем случае, когда