

Это уравнение надо решать при дополнительном условии

$$\int g_0(\omega, p) d^3p = 0, \quad (23,21)$$

к которому сводится (23,11) при подстановке в него (23,17).

По известной функции  $g^{(+)}$  искомый коррелятор тока определяется формулой (23,12). При подстановке в нее разложения (23,17) и простого преобразования с использованием (23,19) получается

$$(j_{\alpha\beta})_{\omega} = \delta_{\alpha\beta} \frac{2e^{2l}}{3\gamma^2} \int v f_0 d^3p - E_{\alpha} E_{\beta} \frac{2le^3}{3E} \int [g_0(\omega, p) + g_0(-\omega, p)] \frac{d^3p}{p}. \quad (23,22)$$

Член  $-i\omega g_0$  в уравнении (23,20) становится существенным при  $\omega \sim mv/Ml$ , т. е. при  $\omega\tau_e \sim 1$ , где  $\tau_e$  — время релаксации по энергиям электронов. С таких частот начинается, следовательно, дисперсия флуктуаций тока.

В общем случае уравнение (23,20) очень сложно. Ограничимся, для иллюстрации, случаем малых частот,  $\omega\tau_e \ll 1$ , и сильных полей, удовлетворяющих условию  $\gamma \gg 1$ , где  $\gamma$  — параметр (22,13). В силу последнего условия, функция  $f_0(p)$  дается выражением (22,18). Вычисление интеграла в первом члене в (23,22) дает

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{2^{3/2}}{3^{3/4}\Gamma(3/4)} \frac{N_e e^2 l}{\gamma^2} \left(\frac{eEl}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}.$$

Во втором члене в (23,22) ограничимся буквенной оценкой. Из уравнения (23,20) (без члена  $-i\omega g_0$ ) находим оценку

$$g_0 \sim \frac{eEl^2 M}{\gamma^2 p^2} f_0.$$

Интеграл оценивается затем как

$$e^3 l E \frac{g_0}{p} p^3.$$

В результате находим для коррелятора тока выражение

$$(j_{\alpha\beta})_{\omega} = \frac{N_e e^2 l}{\gamma^2} \left(\frac{eEl}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/4} \left[0,6\delta_{\alpha\beta} - \beta \frac{E_{\alpha} E_{\beta}}{E^2}\right], \quad (23,23)$$

где  $\beta \sim 1$  — численная постоянная.

## § 24. Рекомбинация и ионизация

Установление равновесной степени ионизации в частично ионизованном газе осуществляется путем различных элементарных актов столкновительной ионизации и обратной рекомбинации сталкивающихся заряженных частиц. В простейшем случае, когда

в газе имеется (помимо электронов) лишь один сорт ионов, процесс установления ионизационного равновесия описывается уравнением вида

$$\frac{dN_e}{dt} = \beta - \alpha N_e N_i. \quad (24,1)$$

Здесь  $\beta$  — число электронов, образующихся в 1 с в 1 см<sup>3</sup> (при столкновениях нейтральных атомов или путем ионизации атомов фотонами); это число не зависит от наличных плотностей электронов  $N_e$  и ионов  $N_i$ . Второй же член дает убыль числа электронов благодаря их рекомбинации с ионами; величину  $\alpha$  называют *коэффициентом рекомбинации*.

Процесс рекомбинации обычно весьма медлен по сравнению с остальными процессами установления равновесия в плазме. Дело в том, что образование нейтрального атома при столкновении иона с электроном требует уноса освобождающейся энергии (энергии связи электрона в атоме). Эта энергия может излучиться в виде фотона (радиационная рекомбинация); в таком случае медленность процесса связана с малостью квантовоэлектродинамической вероятности излучения. Освобождающаяся энергия может быть также передана третьей частице — нейтральному атому; в этом случае медленность процесса связана с малой вероятностью тройных столкновений. Все это приводит к тому, что рекомбинацию часто имеет смысл изучать в условиях, когда распределение всех частиц можно считать максвелловским.

В равновесии производная  $dN_e/dt$  обращается в нуль. Отсюда следует, что величины  $\alpha$  и  $\beta$  в (24,1) связаны друг с другом соотношением

$$\beta = \alpha N_{0e} N_{0i}, \quad (24,2)$$

где  $N_{0e}$  и  $N_{0i}$  — равновесные плотности электронов и ионов, определяющиеся соответствующими термодинамическими формулами (см. V, § 104)<sup>1</sup>.

Коэффициент радиационной рекомбинации вычисляется непосредственно по сечению рекомбинации  $\sigma_{\text{рек}}$  при столкновении электрона с неподвижным ионом (скоростью иона можно пренебречь по сравнению со скоростью электрона):

$$\alpha = \langle v_e \sigma_{\text{рек}} \rangle, \quad (24,3)$$

где усреднение производится по максвелловскому распределению скоростей электрона  $v_e$  (см. задачу 1).

Радиационная рекомбинация существенна, однако, лишь в достаточно разреженном газе, когда тройными столкновениями ча-

<sup>1</sup> В случае радиационной рекомбинации равновесность состояния предполагает также и равновесность излучения в плазме.

стиц можно вовсе пренебречь. В менее разреженном газе основным механизмом является рекомбинация с участием третьей частицы — нейтрального атома. Именно этот механизм мы и рассмотрим теперь подробнее.

При столкновении с атомами энергия электрона изменяется малыми порциями. Поэтому процесс рекомбинации начинается с образования сильно возбужденного атома, а при дальнейших столкновениях этого атома происходит постепенное «опускание» электрона на все более низкие уровни. Такой характер процесса позволяет рассматривать его как «диффузию по энергии» захваченного электрона и соответственно применить к нему уравнение Фоккера—Планка (Л. П. Питаевский, 1962).

Введем функцию распределения захваченных электронов по их (отрицательным) энергиям  $\epsilon$ . Основную роль будет, естественно, играть «диффузия» по области энергий  $|\epsilon| \sim T$ . Напомним в этой связи, что температуру надо во всяком случае считать здесь малой по сравнению с ионизационным потенциалом атомов  $I$ ; при  $T \sim I$  газ был бы уже практически полностью ионизованным (ср. V, § 104).

Уравнение Фоккера—Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial s}{\partial \epsilon}, \quad s = -B \frac{\partial f}{\partial \epsilon} - Af. \quad (24,4)$$

Как обычно, коэффициент  $A$  можно выразить через  $B$  из условия  $s=0$  при  $f=f_0$ , где  $f_0$ —равновесное распределение. После этого поток  $s$  примет вид

$$s = -Bf_0 \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \frac{f}{f_0}. \quad (24,5)$$

«Коэффициент диффузии»  $B(\epsilon)$  определяется по общему правилу как

$$B(\epsilon) = \frac{\sum (\Delta\epsilon)^2}{2\delta t}, \quad (24,6)$$

где  $\Delta\epsilon$ —изменение энергии возбуждения атома при его столкновении с невозбужденным атомом; вычисление  $B(\epsilon)$  по этой формуле сводится к решению механической задачи о столкновении и последующему усреднению по скорости невозбужденного атома (см. задачу 2).

Для нахождения функции  $f_0(\epsilon)$  замечаем, что равновесное распределение по импульсам и координатам для электрона в кулоновском поле заряда  $ze$  (заряд иона) дается формулой Больцмана

$$f_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (2\pi mT)^{-3/2} e^{-\epsilon/T}, \quad \epsilon = \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r} \quad (24,7)$$

(о ее нормировке см. ниже); движение электрона при  $|\varepsilon| \sim T \ll I$  квазиклассично, что и позволяет использовать для энергии  $\varepsilon$  ее классическое выражение. Функция же распределения по  $\varepsilon$  есть, следовательно,

$$f_0(\varepsilon) d\varepsilon = (2\pi mT)^{-3/2} e^{|\varepsilon|/T} \tau(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (24,8)$$

где  $\tau(\varepsilon)$  — объем фазового пространства, отвечающий интервалу  $d\varepsilon$ :

$$\tau(\varepsilon) = \int \delta\left(|\varepsilon| + \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r}\right) d^3x d^3p. \quad (24,9)$$

Заменив  $d^3x d^3p = 4\pi r^2 dr \cdot 4\pi p^2 dp$  и произведя интегрирование, получим

$$\tau(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}\pi^3 (ze^2)^3 m^{3/2}}{|\varepsilon|^{5/2}}. \quad (24,10)$$

Для формулировки условий, определяющих нужное нам решение уравнений (24,4—5), удобно считать, что наличная плотность электронов в газе  $N_e \gg N_{0e}$ ; тогда в (24,1) можно пренебречь скоростью ионизации  $\beta$ , так что убыль  $N_e$  будет определяться одной лишь рекомбинацией. В этих условиях постоянное значение потока  $s$  в стационарном решении уравнения (24,4) прямо дает значение коэффициента рекомбинации ( $s = \text{const} = -\alpha$ ), если только функция  $f(\varepsilon)$  должным образом нормирована. Именно, на самых верхних уровнях ( $|\varepsilon| \ll T$ ) электроны находятся в равновесии со свободными электронами; это значит, что должно быть

$$f(\varepsilon)/f_0(\varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \rightarrow 0, \quad (24,11)$$

причем нормировка  $f_0(\varepsilon)$  должна отвечать одному свободному электрону в единице объема (что и выполнено в (24,7)).

Для нахождения второго граничного условия (при  $\varepsilon \rightarrow -\infty$ ) замечаем, что распределение на глубоких уровнях возбужденного атома не возмущено наличием свободных электронов и не зависит от их числа: оно пропорционально равновесному числу  $N_{0e}$ , а не фактическому  $N_e$ . При условии  $N_e \gg N_{0e}$  эта ситуация выражается граничным условием

$$f(\varepsilon)/f_0(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\varepsilon| \rightarrow \infty. \quad (24,12)$$

Интегрируя уравнение  $s = \text{const}$  с граничным условием (24,11), имеем

$$\frac{f}{f_0} = \text{const} \int_0^{|\varepsilon|} \frac{d|\varepsilon|}{Bf_0} + 1.$$

Константа будет совпадать с  $-\alpha$ , если определить ее так, чтобы удовлетворилось условие (24,12). Таким образом, находим

окончательно

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{d|\varepsilon|}{Bf_0} = \frac{2T^{3/2}}{\pi^{3/2}(ze^2)^3} \int_0^{\infty} \frac{e^{-|\varepsilon|/T} |\varepsilon|^{5/2}}{B(-|\varepsilon|)} d|\varepsilon|. \quad (24,13)$$

Эта формула относится к процессу, в котором роль «третьего тела» играет невозбужденный атом. Если газ уже сильно ионизован (что, однако, еще совместимо с условием  $T \ll I$ ) и достаточно плотен, основная роль может перейти к рекомбинации с участием второго электрона в качестве третьего тела. Скорость рекомбинации становится тогда пропорциональной  $N_e^2 N_i$ , так что коэффициент рекомбинации, определенный по-прежнему согласно (24,1), будет сам пропорционален  $N_e$ . Поскольку релаксация по энергии при электронных соударениях происходит быстро, изложенный метод вычисления коэффициента рекомбинации в этом случае неприменим.

### Задачи

1. Найти коэффициент радиационной рекомбинации с захватом электрона на основное состояние атома водорода при температурах  $T \ll I$  ( $I = e^4 m / 2\hbar^2$  — потенциал ионизации атома водорода).

Решение. Сечение рекомбинации медленного электрона с неподвижным протоном на основной уровень водородного атома есть

$$\sigma_{\text{рек}} = \frac{2^{10} \pi^2 (e^2 / \hbar c) a_B^3 I^2}{3 (2,71 \dots)^4 m^2 c^2 v_e^2},$$

где  $v_e$  — скорость электрона,  $a_B = \hbar^2 / me^2$  — боровский радиус (см. IV, § 56, формулы (56,13), (56,14)). Среднее значение  $\langle v_e^{-1} \rangle = (2m/\pi T)^{1/2}$ . В результате получим согласно (24,3):

$$\alpha = \frac{2^{10} \pi^{3/2}}{3 (2,71)^4} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \frac{a_B^3}{\hbar} \left( \frac{I}{T} \right)^{1/2} = 35 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \frac{a_B^3}{\hbar} \left( \frac{I}{T} \right)^{1/2}.$$

2. Определить коэффициент рекомбинации согласно (24,13), пренебрегая влиянием связи электрона в возбужденном атоме на процесс его столкновения с невозбужденным атомом и полагая транспортное сечение этих столкновений независимым от скорости.

Решение. «Коэффициент диффузии»  $B(\varepsilon)$  вычисляется аналогично тому, как это делалось в § 22, и равен

$$B(\varepsilon) = \frac{N}{3m} \langle v_{\text{ат}}^2 \rangle \langle \sigma_{\text{т}} \rho^3 \rangle. \quad (1)$$

Здесь  $N$  — плотность атомов в газе,  $m$  — масса электрона,  $v_{\text{ат}}$  — относительная скорость возбужденного и невозбужденного атомов. Скорости  $v_{\text{ат}}$  распределены по Максвеллу с приведенной массой ( $M/2$ , где  $M$  — масса атома) в качестве массы частицы; поэтому  $\langle v_{\text{ат}}^2 \rangle = 6T/M$ . Далее,  $\rho$  в (1) есть импульс электрона в поле иона; усреднение  $\sigma_{\text{т}} \rho^3$  производится по области фазового пространства

электрона  $\tau(\varepsilon)$ , отвечающей заданному значению  $|\varepsilon|$ . При  $\sigma_t = \text{const}$  находим

$$\langle \sigma_t p^3 \rangle = \frac{\sigma_t}{\tau(\varepsilon)} \int p^3 \delta \left( |\varepsilon| + \frac{p^2}{2m} - \frac{ze^2}{r} \right) d^3x d^3p = \frac{32 \sqrt{2}}{3\pi} \sigma_t m |\varepsilon|^{3/2},$$

Таким образом,

$$B = \frac{64 \sqrt{2} T \sigma_t N |\varepsilon|^{3/2}}{3\pi M},$$

и затем вычисление по (24,13) дает окончательно

$$\alpha = \frac{32 \sqrt{2\pi} m^{1/2} (ze^2)^3 \sigma_t N}{3MT^{5/2}}. \quad (2)$$

Пренебрежение связью электрона в атоме законно, если частота возмущения, создаваемого атомом вблизи электрона ( $\sim d/\bar{v}_{\text{ат}}$ ,  $d$ —атомные размеры), велика по сравнению с частотой обращения электрона с энергией  $|\varepsilon| \sim T$ . Отсюда получается условие  $T \ll (e^2/d) (m/M)^{1/2}$ .

## § 25. Амбиполярная диффузия

Рассмотрим диффузию заряженных частиц в слабо ионизованном газе. Как и в § 22, степень ионизации предполагается настолько малой, что столкновениями заряженных частиц друг с другом можно пренебречь по сравнению с их столкновениями с нейтральными атомами. Даже в этих условиях диффузия двух родов заряженных частиц—электронов и ионов—происходит независимо ввиду возникновения, в процессе диффузии, электрического поля (*W. Schottky, 1924*).

Уравнения диффузии имеют вид уравнений непрерывности для электронов ( $e$ ) и ионов ( $i$ ):

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \text{div } \mathbf{i}_e = 0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \text{div } \mathbf{i}_i = 0, \quad (25,1)$$

причем плотности потоков выражаются через плотности числа частиц и их градиенты согласно

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_e &= -N_e b_e e \mathbf{E} - D_e \nabla N_e, \\ \mathbf{i}_i &= N_i b_i e \mathbf{E} - D_i \nabla N_i, \end{aligned} \quad (25,2)$$

где  $D_e$ ,  $D_i$ —коэффициенты диффузии, а  $b_e$ ,  $b_i$ —подвижности электронов и ионов<sup>1)</sup>. Те и другие связаны друг с другом соотношениями Эйнштейна

$$D_e = T b_e, \quad D_i = T b_i, \quad (25,3)$$

<sup>1)</sup> Кратность заряда ионов полагаем  $z_i = 1$ , как это обычно и имеет место при малой степени ионизации газа.