БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ ПЛАЗМА

§ 27. Самосогласованное поле

Широкую область применения кинетической теории представляет *плазма*, под которой мы будем понимать полностью ионизованный газ[1]). Термодинамическая теория равновесного состояния плазмы рассмотрена в других томах этого курса (см. V, §§ 78—80, IX, § 85). Главы III—V этой книги посвящены изучению кинетических свойств плазмы. Во избежание непринципиальных усложнений мы будем (где это понадобится) считать плазму двухкомпонентной—содержащей лишь электроны (заряд $-e$) и положительные ионы одного сорта с зарядом ze.

Как и для обычных газов, условие применимости метода кинетического уравнения к плазме требует ее достаточной разреженности; газ должен лишь слабо отклоняться от идеальности. Ввиду медленности убывания кулоновских сил, однако, это условие для плазмы более сильное, чем для газа из нейтральных частиц. Не делая пока различия между частицами с различными зарядами, напишем условие слабой неидеальности плазмы в виде

$$T \gg e^2/\bar{r} \sim e^2 N^{1/3}, \tag{27,1}$$

где T—температура плазмы, N—полное число частиц в единице объема, а $\bar{r} \sim N^{-1/3}$—среднее расстояние между ними. Это условие выражает собой малость средней энергии взаимодействия двух ионов по сравнению с их средней кинетической энергией. Выразим это условие еще и в другом виде, введя так называемый *дебаевский радиус* плазмы a, определенный согласно

$$a^{-2} = \frac{4\pi}{T} \sum_a N_a (z_a e)^2, \tag{27,2}$$

где суммирование производится по всем родам ионов; напомним (см. V, § 78), что a определяет расстояние, на котором экранируется кулоновское поле заряда в плазме. Введя $a \sim (T/4\pi N e^2)^{1/2}$ в (27,1), получим

$$e^2 N^{1/3}/T \sim \bar{r}^2/4\pi a^2 \ll 1 \tag{27,3}$$

[1]) Термин введен *Ленгмюром* (*I. Langmuir*, 1923), положившим начало систематическому теоретическому изучению плазмы.

— в разреженной плазме среднее расстояние между частицами должно быть мало по сравнению с дебаевским радиусом, т. е. «ионное облако» вокруг заряда должно действительно содержать много частиц. Малое отношение (27,3) играет для плазмы роль «газового параметра».

Везде в главах III—V (за исключением лишь § 40) плазма будет предполагаться классической. Этим подразумевается выполненным лишь очень слабое условие—температура плазмы должна быть высока по сравнению с температурой вырождения ее электронной компоненты:

$$T \gg \hbar^2 N^{2/3}/m, \tag{27,4}$$

где m—масса электрона (ср. V, § 80).

Кинетическое уравнение для каждого сорта частиц в плазме (электронов и ионов) имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \mathrm{St}\, f, \tag{27,5}$$

где f—функция распределения данных частиц по координатам и импульсам, St—их интеграл столкновений (с частицами всех сортов). При этом производная $\dot{\mathbf{p}}$ определяется силой, действующей на частицу. Эта сила в свою очередь выражается через напряженности электрического и магнитного полей, создаваемых всеми остальными частицами в точке нахождения данной частицы. Здесь возникает, однако, следующий вопрос.

В случае нейтральных частиц (атомов или молекул), благодаря быстрому убыванию сил взаимодействия, заметные изменения в их движении, интерпретируемые как столкновения, происходят лишь на малых прицельных расстояниях (порядка величины самих атомных размеров). В промежутках же между такими столкновениями частицы движутся как свободные; именно поэтому в левой стороне кинетического уравнения для обычных газов полагается $\dot{\mathbf{p}}=0$. В плазме же, ввиду дальнодействующего характера кулоновских сил, заметное изменение движения частиц происходит даже на больших прицельных расстояниях; экранирование кулоновских сил в плазме происходит лишь на расстояниях $\sim a$, которые согласно условию (27,3) велики даже по сравнению с межчастичными расстояниями (см. V, § 78, а также задачу 1 к § 31). Не все эти случаи, однако, должны интерпретироваться в кинетическом уравнении как столкновения. В кинетической теории хаотические столкновения представляют собой тот механизм, который приводит к приближению к состоянию равновесия с соответствующим возрастанием энтропии системы. Между тем столкновения на больших ($\sim a$) прицельных расстояниях не могут служить таким релаксационным механизмом.

Дело в том, что взаимодействие двух заряженных частиц на таких расстояниях представляет собой в действительности коллективный эффект, в котором участвует большое число частиц. Соответственно и то эффективное поле, которым можно описать это взаимодействие, создается большим числом частиц, т. е. имеет макроскопический характер. Тем самым весь процесс приобретает макроскопически достоверный, а не случайный характер; такие процессы не могут приводить к возрастанию энтропии системы. Они должны быть исключены поэтому из понятия столкновений, учитываемых в правой части кинетических уравнений.

Такому выделению отвечает представление точных микроскопических значений электрического ($\mathbf{e}$) и магнитного ($\mathbf{h}$) полей, действующих на некоторую частицу в плазме, в виде

$$\mathbf{e}=\mathbf{E}+\mathbf{e}', \quad \mathbf{h}=\mathbf{B}+\mathbf{h}', \tag{27,6}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — значения полей, усредненные по областям, содержащим много частиц,— областей с размерами, большими по сравнению с расстояниями между частицами (и в то же время малыми по сравнению с дебаевским радиусом). Члены же $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{h}'$ описывают тогда случайные флуктуации полей, которые и приводят к случайным изменениям движения частиц, т. е. к столкновениям.

По своему точному смыслу $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в (27,6) — средние значения полей в месте нахождения заданной частицы. Но в силу предполагаемой разреженности плазмы можно пренебречь корреляцией между одновременными положениями частиц в ней. Тогда точка нахождения каждой заданной частицы ничем не выделена, так что под $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ можно понимать просто поля, усредненные в обычном для макроскопической электродинамики смысле. Эти поля и будут определять лоренцеву силу, которая должна быть подставлена в уравнение (27,5) вместо $\dot{\mathbf{p}}$.

В этой главе мы будем рассматривать явления, в которых несущественны столкновения между частицами плазмы; в таких случаях говорят о *бесстолкновительной* плазме. Точные условия возможности пренебрежения столкновениями зависят, вообще говоря, от конкретной постановки задачи. Но обычно необходимое условие состоит в требовании малости эффективной частоты столновений ν (величина, обратная среднему времени свободного пробега частицы) по сравнению с частотой ω изменения макроскопических полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в данном процессе:

$$\nu \ll \omega. \tag{27,7}$$

В силу этого условия интеграл столкновений в кинетическом уравнении оказывается малым по сравнению с производной $\partial f/\partial t$. Столкновениями можно пренебречь также и в случае, если средняя длина пробега частиц $l \sim \bar{v}/\nu$ велика по сравнению с расстоянием L, на котором меняется поле («длина волны» поля). Если обозначить $1/L \sim k$, то это условие запишется в виде

$$\nu \ll k\bar{v}. \tag{27,8}$$

При этом интеграл столкновений окажется малым по сравнению с членом $\mathbf{v}\nabla f$ в левой стороне кинетического уравнения.

После пренебрежения интегралом столкновений кинетические уравнения для функций распределения электронов (f_e) и ионов (f_i) принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_e}{\partial t}+\mathbf{v}\,\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}}-e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}}=0,\\ \frac{\partial f_i}{\partial t}+\mathbf{v}\,\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}}+ze\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,[\mathbf{vB}]\right)\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}}=0.\end{gathered} \tag{27,9}$$

К этим уравнениям надо присоединить систему усредненных уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, &&\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\\ &\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}, &&\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho,\end{aligned} \tag{27,10}$$

где ρ и $\mathbf{j}$ — средние плотность зарядов и плотность тока, выражающиеся через функции распределения очевидными формулами

$$\begin{gathered}\rho=e\int(zf_i-f_e)\,d^3p,\\ \mathbf{j}=e\int(zf_i-f_e)\,\mathbf{v}\,d^3p.\end{gathered} \tag{27,11}$$

Уравнения (27,9—11) составляют связанную систему уравнений, определяющих одновременно как функции распределения f_e, f_i, так и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$; определяемые таким образом поля называют *самосогласованными*. Самосогласованное поле было введено в кинетические уравнения *А. А. Власовым* (1937); систему уравнений (27,9—11) называют *уравнениями Власова*.

В соответствии со сказанным выше, эволюция функций распределения в бесстолкновительной плазме с самосогласованным полем не связана с увеличением энтропии и потому сама по себе не может привести к установлению статистического равновесия. Это очевидно и прямо из вида уравнений (27,9), в которых $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ выступают формально лишь как внешние поля, наложенные на плазму.

Каждое из кинетических уравнений (27,9) имеет вид

$$\frac{df}{dt}=0, \tag{27,12}$$

где полная производная означает дифференцирование вдоль траектории частиц. Общее решение такого уравнения есть произвольная функция от всех интегралов движения частицы в полях **E** и **B**.

§ 28. Пространственная дисперсия в плазме

Перепишем уравнения (27,10) в виде, более обычном для макроскопической электродинамики, введя в них наряду с напряженностью **E** также и электрическую индукцию **D**. При этом мы определим вектор электрической поляризации **P** соотношениями

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho; \tag{28,1}$$

непротиворечивость этих двух формул обеспечивается уравнением непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$ (мы вернемся еще к этому определению ниже в этом параграфе). Тогда уравнения (27,10) примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \tag{28,2}$$

В слабых полях связь индукции **D** с напряженностью **E** линейна[1]). Но уже в обычных средах эта связь не имеет мгновенного характера по времени: значение $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ в некоторый момент времени t зависит, вообще говоря, от значений $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ не только в тот же, но и во все предшествующие моменты времени (см. VIII, § 58). В плазме к этому добавляется еще и нелокальность связи: значение $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ в некоторой точке пространства $\mathbf{r}$ зависит от значений $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ не только в той же точке, но, вообще говоря, и во всем объеме плазмы. Это свойство связано с тем, что «свободное» (т. е. без столкновений) движение частиц в плазме определяется значениями поля на всей их траектории.

Наиболее общая линейная связь между функциями $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ может быть записана в виде

$$D_\alpha(t, \mathbf{r}) = E_\alpha(t, \mathbf{r}) + \int_{-\infty}^{t} \int K_{\alpha\beta}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_\beta(t', \mathbf{r}')\, d^3x'\, dt.$$

Для пространственно-однородной плазмы ядро интегрального оператора $K_{\alpha\beta}$ зависит только от разности пространственных

[1]) Условие слабости поля будет сформулировано в § 29.